

2 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME PERMANENT

2.1 L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

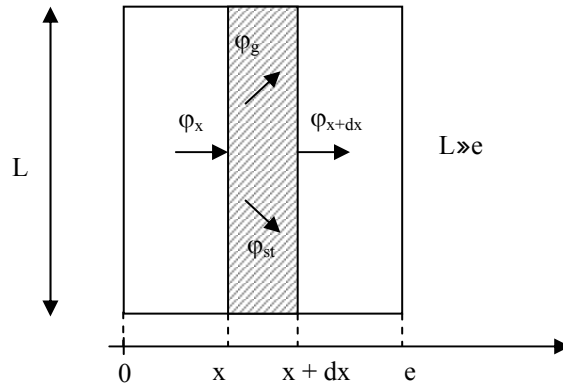


Figure 2.1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur \$dx\$ dans la direction \$x\$ et de section d'aire \$S\$ normalement à la direction \$Ox\$. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\phi_x + \phi_g = \phi_{x+dx} + \phi_{st}$$

Avec : $\phi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$ et $\phi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$

$$\phi_g = \dot{q} S dx$$

$$\phi_{st} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par \$dx\$ nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Soit : $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$
- S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$
- Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de \$T\$.

Les hypothèses a) + b) + c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$\boxed{a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (2.2)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\boxed{\nabla^2 T = 0} \quad (2.3)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (2.4)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t , l'équation

(2.4) peut s'écrire sous forme simplifiée :
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r T)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (2.5)$$

2.2 Transfert unidirectionnel

2.2.1 Mur simple

On se placera dans le cas où l'écoulement est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e , de conductivité thermique λ , et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :

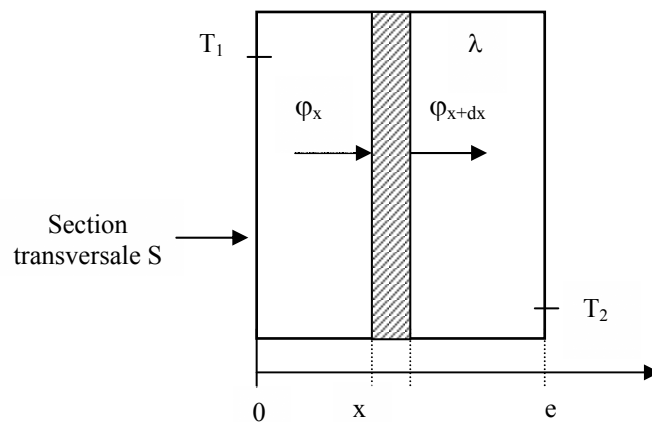


Figure 2.2 : Bilan thermique élémentaire sur un mur simple

En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$ il vient :

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} \Rightarrow -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx}$$

D'où $\frac{dT}{dx} = A$ et $T(x) = A x + B$

Avec les conditions aux limites : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=e) = T_2$

D'où :

$$T = T_1 - \frac{x}{e} (T_1 - T_2) \tag{2.6}$$

Le profil de température est donc linéaire. La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation : $\phi = -\lambda \frac{dT}{dx}$, d'où :

$$\phi = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{e} \tag{2.7}$$

La relation (2.7) peut également se mettre sous la forme : $\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}}$, cette relation est analogue à la

loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\frac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de surface latérale S , on se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la figure 2.3.

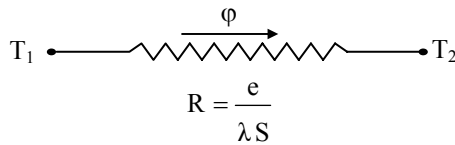


Figure 2.3 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple

2.2.2 Mur multicouches

C'est le cas des murs réels (schématisé sur la figure 2.4) constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S .

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\phi = h_1 S (T_{f1} - T_1) = \frac{\lambda_A S (T_1 - T_2)}{e_A} = \frac{\lambda_B S (T_2 - T_3)}{e_B} = \frac{\lambda_C S (T_3 - T_4)}{e_C} = h_2 S (T_4 - T_{f2})$$

D'où :

$$\phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \tag{2.8}$$

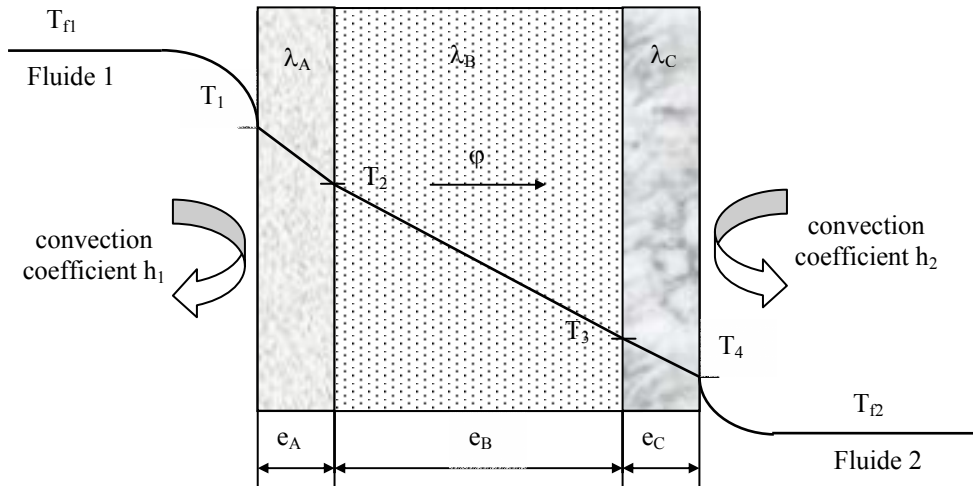


Figure 2.4 : Schématisation des flux et des températures dans un mur multicouches

On a considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuité de température aux interfaces. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une micro-couche d'air existe entre les creux des surfaces en regard et crée une résistance thermique R (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact. La formule précédente s'écrit alors :

$$\phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + R_{AB} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + R_{BC} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.9)$$

Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure 2.5.

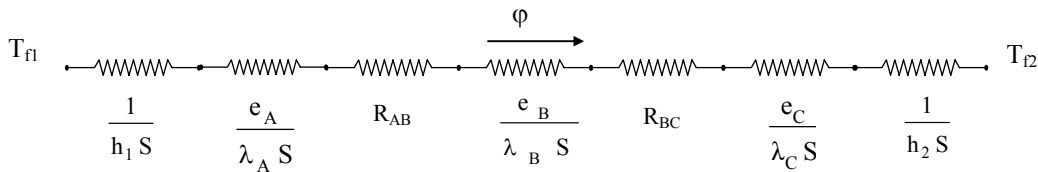


Figure 2.5 : Schéma électrique équivalent d'un mur multicouches

Remarques :

- Une résistance thermique ne peut être définie qu'entre deux surfaces isothermes.
- Cette résistance thermique de contact est négligée si le mur comporte une paroi isolante ou si les parois sont jointes par soudure.

2.2.3 Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas isotropes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux (figure 2.6).

En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$

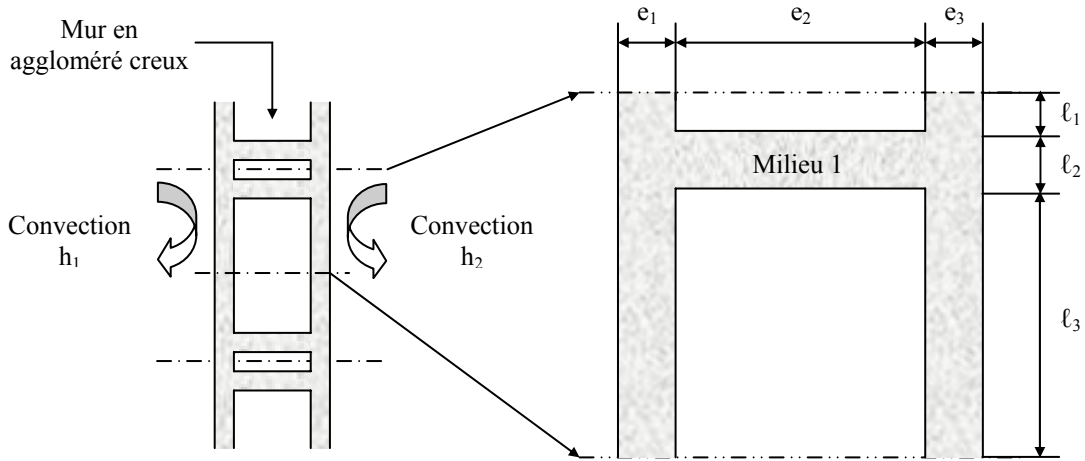


Figure 2.6 : Schématisation d'un mur composite

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \ell L} ; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \ell L} ; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_1 L} ; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 \ell_2 L} ; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_3 L} ; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 \ell L} ; R_7 = \frac{1}{h_2 \ell L}$$

ce qui peut être schématisé par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure 2.7.

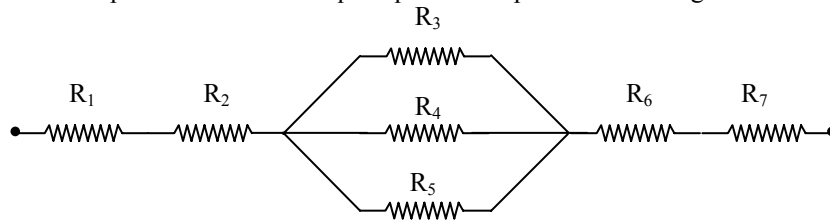


Figure 2.7 : Schéma électrique équivalent du mur composite

2.2.4 Cylindre creux long (tube)

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ , de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 , de longueur L , les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 (cf. figure 2.8). On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

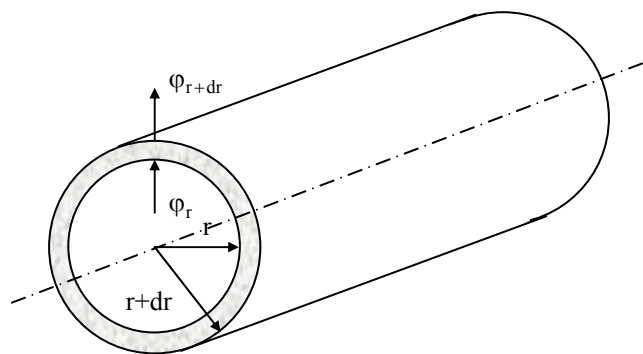


Figure 2.8 : Schéma des transferts dans un cylindre creux

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et $r + dr$:

$$\Phi_r = \Phi_{r+dr}$$

Avec $\varphi_r = -\lambda 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r$ et $\varphi_{r+dr} = -\lambda 2\pi (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$

Soit $-\lambda 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r = -\lambda 2\pi (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$ d'où $r \frac{dT}{dr} = C$

Avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

D'où :

$$T(r) = \frac{T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.10)$$

Et par application de la relation $\varphi = -\lambda 2\pi r \frac{dT}{dr}$, on obtient :

$$\varphi = \frac{2\pi \lambda L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.11)$$

Cette relation peut aussi être mise sous la forme : $\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{12}}$ avec $R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda L}$ et être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 2.9.

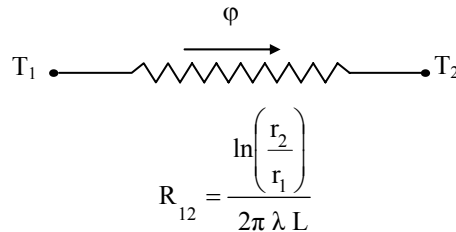


Figure 2.9 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux

2.2.5 Cylindre creux multicouches

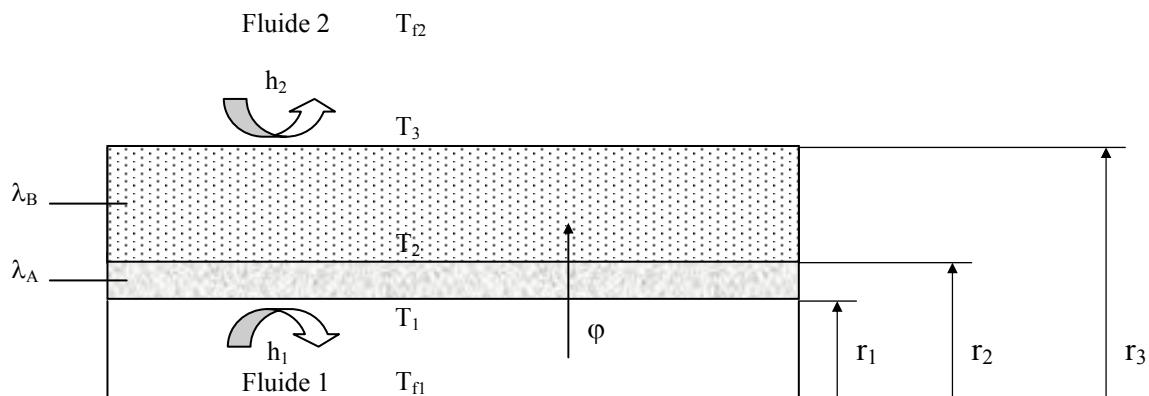


Figure 2.10 : Schéma des transferts dans un cylindre creux multicouches

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes (cf. figure 2.10)

En régime permanent, le flux de chaleur φ se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\varphi = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi \lambda_A L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi \lambda_B L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_3 L (T_3 - T_{f2})$$

D'où :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}} \quad (2.12)$$

ce qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent de la figure 2.11.

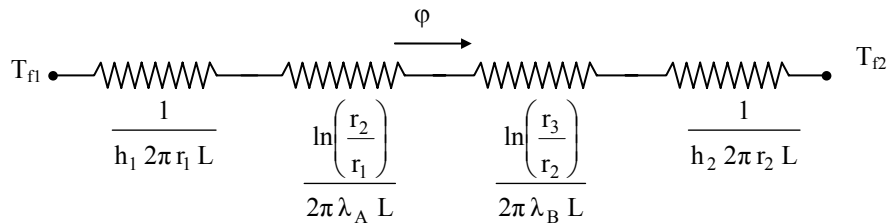


Figure 2.11 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux multicouche

2.3 Transfert multidirectionnel

Dans le cas où la propagation de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, deux méthodes de résolution peuvent être appliquées :

2.3.1 Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\varphi = \lambda F (T_1 - T_2) \quad (2.13)$$

Avec :	λ	Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S_1 et S_2	$(W m^{-1} °C^{-1})$
	T_1	Température de la surface S_1	$(°C)$
	T_2	Température de la surface S_2	$(°C)$
	F	Coefficient de forme	(m)

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2 . Les valeurs de F pour les configurations les plus courantes sont présentées en annexe A.2.1.

Cas particulier : Enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée...)

Méthode : on découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux selon la représentation de la figure 2.12.

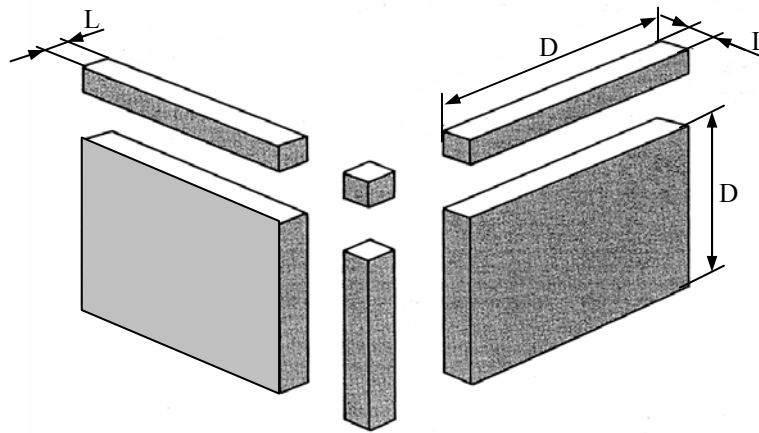


Figure 2.12 : Méthode de découpe d'une enceinte tridimensionnelle

Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur e des parois (supposée constante) nous avons les relations :

$$\begin{aligned} F_{\text{paroi } i} &= S_i/D_i \\ F_{\text{bord } i} &= 0,54 D_i \\ F_{\text{coin } i} &= 0,15 L_i \end{aligned}$$

Avec : S_i : Aire de la paroi i
 D_i : Longueur de la paroi ou du bord i
 L_i : Epaisseur des parois

Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\phi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i F_{\text{paroi}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i F_{\text{bord}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^8 \lambda_i F_{\text{coin}_i} \Delta T_i$$

Avec : λ_i : Conductivité thermique (équivalente si paroi multicouche) de la paroi i ($\text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1}$)
 ΔT_i : Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi i (°C)

2.3.2 Méthodes numériques

Expression de l'équation de Laplace en différences finies

Dans le cas où la méthode du coefficient de forme ne peut pas s'appliquer (surfaces non isothermes par exemple), il faut résoudre l'équation de Laplace numériquement. On utilise une méthode aux différences finies en discrétisant le domaine considéré (espace ou plan). On traitera dans ce qui suit le cas bidimensionnel, le cas tridimensionnel s'en déduit en rajoutant simplement une dimension d'espace.

On considère un milieu plan sur lequel on a appliqué un maillage de pas Δx et Δy tel que représenté sur la figure 2.13.

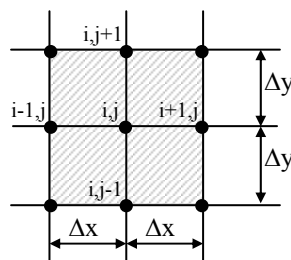


Figure 2.13 : Représentation du maillage de la surface

Les dérivées partielles de la température T peuvent s'exprimer selon les formules suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \approx \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \left(i - \frac{1}{2}, j \right) \approx \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) \approx \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta y} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} \left(i, j - \frac{1}{2} \right) \approx \frac{T(i, j) - T(i, j-1)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) - \frac{\partial T}{\partial x} \left(i - \frac{1}{2}, j \right)}{\Delta x} = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2T(i, j)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} (i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} \left(i, j - \frac{1}{2} \right)}{\Delta y} = \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1) - 2T(i, j)}{(\Delta y)^2}$$

L'équation de Laplace en bidimensionnel : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ s'écrit alors :

$$\frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2T(i, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1) - 2T(i, j)}{(\Delta y)^2} = 0$$

Et si l'on choisit $\Delta x = \Delta y$, on obtient : $T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i+1, j) + T(i, j-1) + T(i, j+1)}{4}$

Expression des conditions aux limites en différences finies

Les conditions aux limites imposant sur un bord une température de surface s'expriment simplement en fixant la valeur de la température T(i,j) à la valeur imposée pour tout couple (i,j) représentant un point de ce bord.

Les conditions aux limites avec transfert convectif ou flux imposé s'expriment de la manière suivante :

Bord rectiligne

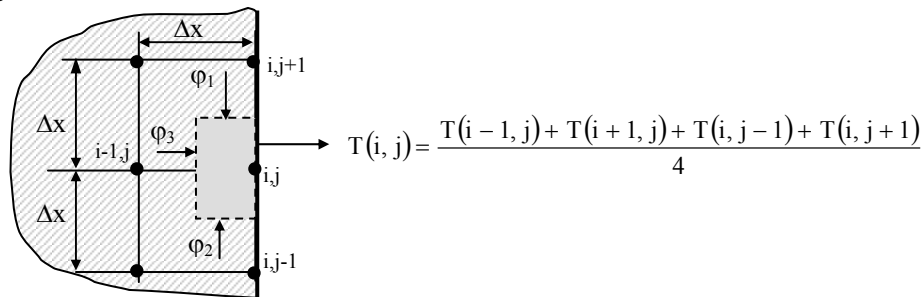


Figure 2.13 : Représentation des flux élémentaires sur un bord rectiligne

Un bilan thermique appliqué à la surface grise (rectangle de côtés $\Delta x/2$ et Δx , cf. figure 2.13)) conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

Flux linéique imposé ϕ (en $W.m^{-1}$) : $T(i, j) = \frac{T(i-1, j)}{2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1)}{4} - \frac{\phi}{2\lambda}$

Coefficient de convection imposé : $T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1)}{2} + Bi T_\infty}{2 + Bi}$

Où $Bi = \frac{h \Delta x}{\lambda}$ est le nombre de Biot

Coin extérieur

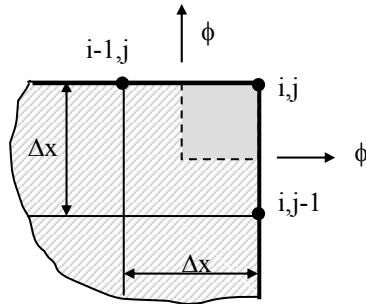


Figure 2.14 : Représentation des flux élémentaires sur un coin extérieur

Un bilan thermique appliqué à la surface grise (cf. figure 2.14) conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

$$\text{Flux linéique imposé } \phi \text{ (en } \text{W.m}^{-1}\text{)} : T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j-1)}{4} - \frac{\phi}{2\lambda}$$

$$\text{Coefficient de convection imposé : } T(i, j) = \frac{\frac{T(i-1, j) + T(i, j-1)}{2} + \text{Bi } T_\infty}{1 + \text{Bi}}$$

Coin intérieur

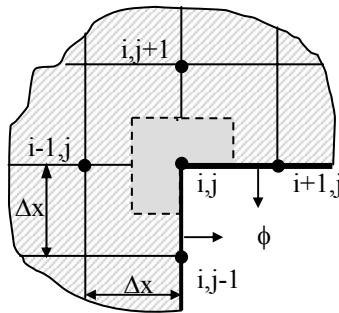


Figure 2.15 : Représentation des flux élémentaires sur un coin intérieur

Un bilan thermique appliqué à la surface grise (cf. figure 2.15) conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

$$\text{Flux linéique imposé } \phi \text{ (en } \text{W.m}^{-1}\text{)} : T(i, j) = \frac{T(i-1, j)}{2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1)}{4} - \frac{\phi}{2\lambda}$$

$$\text{Coefficient de convection imposé : } T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j+1) + \frac{T(i+1, j) + T(i, j-1)}{2} + \text{Bi } T_\infty}{3 + \text{Bi}}$$

Méthode de résolution numérique

Soit à résoudre l'équation de Laplace sur un domaine plan (D) limité par un contour (C).

On réalise un maillage du système avec un pas Δx en général identique dans les deux directions du plan.

On affecte à chaque point du domaine (D) une valeur initiale de la température :

- Egale à la température imposée sur les points du contour où la condition limite impose une température.
- Arbitraire ailleurs mais la plus « réaliste » possible.

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Gauss-Siedel. On effectue des itérations successives consistant à remplacer la valeur de la température en chaque nœud du maillage par la valeur calculée par l'équation aux différences finies qui lui est associée. Une itération consiste à effectuer un balayage complet de tous les nœuds, ligne après ligne et de gauche à droite pour chaque ligne par exemple. Les valeurs recalculées

sont immédiatement prises en compte pour le calcul de la valeur de la température T aux points d'ordre supérieurs (points situés à droite et en-dessous dans le mode de balayage proposé).

Critère de convergence :

On peut par exemple arrêter le calcul dès que la variation la plus grande de $T(i,j)$ au cours d'une itération reste inférieure à une valeur ε donnée.

Remarques :

- On n'applique aucun calcul sur les points du contour où la température est imposée.
- La valeur de la température sera rangée dans un tableau $T(i,j)$, on pourra utiliser un autre tableau $L(i,j)$ dont les valeurs indiqueront si le point de coordonnées $(i\Delta x, j\Delta y)$ appartient au domaine (D) et le type d'équation aux différences finies qui s'y applique.
- On peut accélérer la convergence en appliquant un coefficient de surrelaxation R ($1 < R < 2$, optimum proche de 1,7) au calcul de $T(i,j)$ de la manière suivante (si on applique l'ordre de balayage proposé):

$$T_{n+1}(i, j) = (1 - R) T_n(i, j) + R \frac{T_{n+1}(i-1, j) + T_n(i+1, j) + T_{n+1}(i, j-1) + T_n(i, j+1)}{4}$$

- On peut noter que la discrétisation décrite ici revient très exactement à simuler un milieu bidimensionnel conducteur de l'électricité par un réseau de résistances reliant chaque nœud à ses voisins.

2.4 Les ailettes

2.4.1 L'équation de la barre

Le problème de la barre encastrée schématise le problème pratique important du refroidissement d'un solide par des ailettes.

Considérons une barre de section constante (épaisseur e et largeur ℓ) encastrée entre 2 surfaces à température T_0 et baignant dans un fluide à température T_∞ .

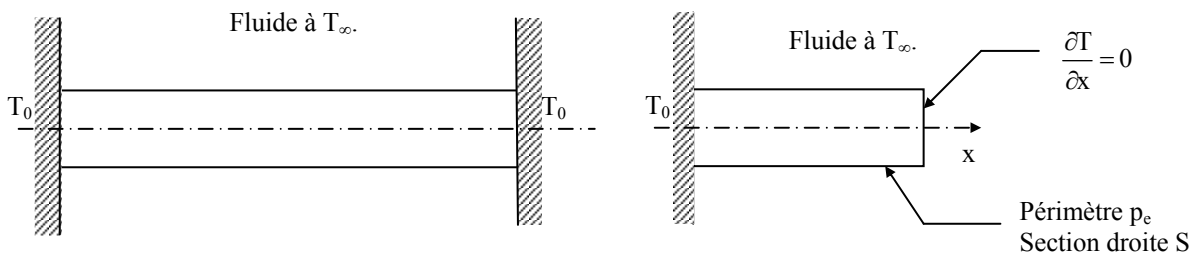


Figure 2.16 : Représentation d'une barre encastrée et schéma simplifié

La symétrie du problème montre l'existence d'un extremum de la température au milieu de la barre ce qui permet de simplifier la géométrie et de ne considérer qu'une demi-barre avec condition de flux nul à l'extrémité située en contact avec le milieu à T_∞ (cf figure 2.16).

La barre est supposée de section suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de variation de température dans une même section droite à une distance x de l'encastrement dans la paroi à T_0 .

Effectuons un bilan d'énergie sur le système constitué par la portion de barre comprise entre les abscisses x et $x+dx$ (nous retenons l'hypothèse du régime permanent et nous négligeons le rayonnement) :

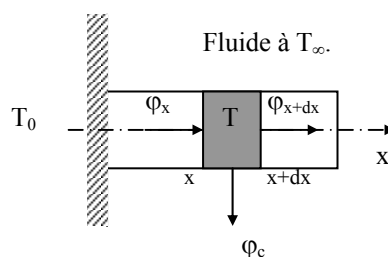


Figure 2.17 : Représentation des flux élémentaires sur une barre encastrée

Avec :

$$\begin{aligned} \varphi_x & \text{ Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse } x & \varphi_x &= -\left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_x \\ \varphi_{x+dx} & \text{ Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse } x+dx & \varphi_x &= -\left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} \\ \varphi_c & \text{ Flux de chaleur transmis par convection à la périphérie} \\ & \text{ de la barre entre } x \text{ et } x+dx & \varphi &= h p_e dx [T(x) - T_\infty] \end{aligned}$$

Le bilan d'énergie s'écrit : $\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_c$

$$\text{Soit : } \left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_x = h p_e dx [T(x) - T_\infty]$$

Si λ et S sont indépendants de l'abscisse x , nous obtenons :

$$\lambda S \frac{\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x}{dx} = h p_e [T(x) - T_\infty]$$

Donc $T(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante appelée équation de la barre :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h p_e}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0} \quad (2.14)$$

2.4.2 Flux extrait par une ailette

Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres, exemple : barre d'épaisseur e et de longueur L , avec $e \ll L$. Elles sont utilisées à chaque fois que des densités de flux élevées sont à transmettre dans un encombrement réduit : refroidissement de composants électroniques, refroidissement d'un moteur par air...

On a établi l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ d'une ailette encastrée dans un mur à la température T_0 et baignant dans un fluide à la température T_∞ :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h p_e}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0$$

$$\text{En posant : } \omega^2 = \frac{h p_e}{\lambda S} \text{ et } \theta = T - T_\infty \text{ elle peut encore s'écrire : } \frac{d^2\theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0$$

Si la section S est constante, c'est une équation différentielle du 2nd ordre à coefficients constants dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = A \exp(\omega x) + B \exp(-\omega x) \quad \text{ou} \quad \theta = A_1 \operatorname{ch}(\omega x) + B_1 \operatorname{sh}(\omega x)$$

2.4.2.1 Ailette rectangulaire longue de section constante

Dans le cas de l'ailette longue, on émet l'hypothèse que : $T(x=L) = T_\infty$, où L est la longueur de l'ailette.

$$\begin{aligned} \text{Les conditions aux limites s'écrivent alors :} & \text{ en } x = 0 : \quad \theta(0) = T_0 - T_\infty & (a) \\ & \text{ en } x = L : \quad \theta(L) = 0 & (b) \end{aligned}$$

$$(b) \Rightarrow A = 0$$

$$(a) \Rightarrow B = T_0 - T_\infty$$

D'où :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-\omega x) \quad (2.15)$$

Le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette peut être calculé par intégration du flux de convection local :

$$\varphi_p = \int_0^L h p_e [T(x) - T_\infty] dx$$

Ou plus facilement en remarquant que dans le cas du régime permanent c'est le même que celui transmis par conduction à la base de l'ailette soit : $\varphi_p = \varphi_c(x=0)$

$$\varphi_c = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda S (T_0 - T_\infty) (-\omega) \exp(-\omega x) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{h p_e}{\lambda S}}$$

D'où :

$$\varphi_p = \sqrt{h p_e \lambda S} (T_0 - T_\infty) \quad (2.16)$$

2.4.2.2 Ailette rectangulaire de section constante isolée à l'extrémité

La solution générale obtenue est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = 0 \quad (\text{conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \cosh(\omega x) + \tanh(\omega L) \sinh(\omega x) \quad (2.17)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_p = \omega \lambda S \tanh(\omega L) (T_0 - T_\infty) \quad (2.18)$$

Remarque : si l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur ℓ , $\omega \approx \sqrt{\frac{h}{\lambda e}}$

2.4.2.3 Ailette rectangulaire de section constante avec transfert de chaleur à l'extrémité

La solution générale obtenue est identique au cas 2.3.2.1, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h S [T(x=L) - T_\infty] \quad (\text{conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[\omega(L-x)] + \left[\frac{h}{\omega \lambda} \sinh[\omega(L-x)] \right]}{\cosh(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda} \sinh(\omega L)} \quad (2.19)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\phi_p = \omega \lambda S (T_0 - T_\infty) \frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda}}{1 + \frac{h}{\omega \lambda} \tanh(\omega L)} \quad (2.20)$$

Remarque :

Dans le cas où l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur ℓ (ce qui est en général vérifié) : $\frac{h}{\omega \lambda} = \sqrt{\frac{h e}{\lambda}}$. Les ailettes étant en général réalisées en matériau bon conducteur (λ élevé) et ayant une épaisseur faible, l'hypothèse $\sqrt{\frac{h e}{\lambda}} \ll 1$ est le plus souvent vérifiée, les équations (2.19) et (2.20) se ramènent alors aux expressions plus simples des équations (2.17) et (2.18) qui sont celles utilisées dans la pratique (cf. annexe A.2.2).

2.4.2.4 Ailette circulaire de section rectangulaire

Ces d'ailettes destinées à améliorer le transfert de chaleur entre la paroi externe d'un tube et le milieu ambiant (exemple : tubes de radiateur d'automobile) peuvent être schématisées de la manière suivante :

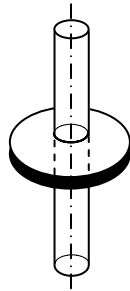


Figure 2.18 : Schéma d'une ailette circulaire

Effectuons un bilan thermique sur l'élément d'ailette compris entre les rayons r et $r+dr$:

Le bilan d'énergie s'écrit (cf. figure 2.19): $\phi_r = \phi_{r+dr} + \phi_c$

Avec :

ϕ_r Flux de chaleur transmis par conduction au rayon r $\phi_r = -\lambda 2 \pi r e \left(\frac{dT}{dr} \right)_r$

ϕ_{r+dr} Flux de chaleur transmis par conduction au rayon $r + dr$ $\phi_{r+dr} = -\lambda 2 \pi (r + dr) e \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$

ϕ_c Flux de chaleur transmis par convection sur la surface de l'ailette entre r et $r + dr$ $\phi_c = 2 \{ h 2 \pi r dr [T(r) - T_\infty] \}$

Si λ est indépendant du rayon r , nous obtenons :

$$\frac{1}{r} \frac{(r+dr) \left(\frac{dT}{dx} \right)_{r+dr} - r \left(\frac{dT}{dx} \right)_r}{dr} = \frac{2h}{\lambda e} [T(x) - T_\infty]$$

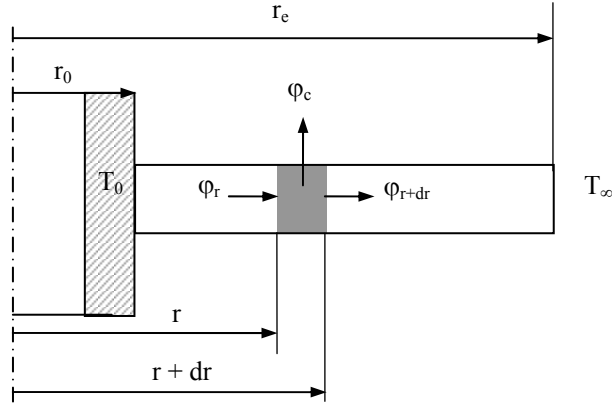


Figure 2.19 : Représentation des flux élémentaires sur une ailette circulaire

Soit encore : $\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2h}{\lambda e} \theta = 0$ où $\theta = T - T_\infty$

C'est une équation de Bessel (cf. annexe A.2.3) dont la solution s'écrit sous la forme :

$$\theta = C_1 I_0(\omega r) + C_2 K_0(\omega r) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{2h}{\lambda e}}$$

C_1 et C_2 étant déterminé par les conditions aux limites :

En $r = r_0$: $\theta = T_0 - T_\infty$

En $r = r_e$: $h \theta(r_e) = -\lambda \frac{d\theta}{dr}(r_e)$ (cas le plus général : transfert de chaleur à l'extrémité)

On en déduit les valeurs de C_1 et de C_2 :

$$C_1 = \frac{K_1(\omega r_e) - \frac{h}{\lambda \omega} K_0(\omega r_e)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e) + \frac{h}{\lambda \omega} [I_0(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_0(\omega r_e)]}$$

$$C_2 = \frac{1 - C_1 I_0(\omega r_0)}{K_0(\omega r_0)}$$

Dans le cas où l'on peut faire l'hypothèse du flux nul à l'extrémité : $\sqrt{\frac{h e}{\lambda}} \ll 1$, on aboutit à l'expression

simplifiée suivante :

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{K_1(\omega r_e) I_0(\omega r) + I_1(\omega r_e) K_0(\omega r)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)} \quad (2.21)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a alors pour expression :

$$\phi_p = \lambda 2\pi r_0 e \omega (T_0 - T_\infty) \frac{I_1(\omega r_e) K_1(\omega r_0) - K_1(\omega r_e) I_1(\omega r_0)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)} \quad (2.22)$$

2.4.3 Efficacité d'une ailette

Elle définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base (conductivité thermique $\lambda \rightarrow \infty$, pas de résistance thermique de conduction donc pas de chute de température dans l'ailette).

Le flux échangé par cette ailette idéale serait :

$$\varphi_{\max} = h p_e L (T_0 - T_\infty) \text{ pour une ailette rectangulaire de périmètre } p \text{ et de longueur } L$$

$$\varphi_{\max} = 2 h \pi (r_e^2 - r_0^2) (T_0 - T_\infty) \text{ pour une ailette circulaire de rayon de base } r_0 \text{ et de rayon externe } r_e.$$

$$\text{L'efficacité de l'ailette s'écrit donc : } \eta = \frac{\varphi_p}{\varphi_{\max}}$$

Nous en déduisons les relations suivantes :

Ailette rectangulaire longue :

$$\eta = \frac{1}{\omega L} \tag{2.23}$$

Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité :

$$\eta = \frac{\tanh(\omega L)}{\omega L} \tag{2.24}$$

Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité :

$$\eta = \frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda}}{\omega L + \frac{h L}{\lambda} \tanh(\omega L)} \tag{2.25}$$

Avec : $\omega = \sqrt{\frac{h p_e}{\lambda S}}$

Ailette circulaire de section rectangulaire :

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{2 \lambda e}{h r_0 r_0}} \frac{1}{\frac{r_e^2}{r_0^2} - 1} \frac{I_1(\omega r_e) K_1(\omega r_0) - K_1(\omega r_e) I_1(\omega r_0)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)}}{\omega L + \frac{h L}{\lambda} \tanh(\omega L)} \tag{2.26}$$

Avec : $\omega = \sqrt{\frac{2 h}{\lambda e}}$

Dans le cas de géométries plus complexes (ailettes à section variable, ailettes aiguilles...), il existe des formules ou des abaques (cf. annexe A.2.2) permettant de déterminer l'efficacité des ailettes et ensuite le flux de chaleur φ_p extrait par l'ailette grâce à la relation : $\varphi_p = \eta \varphi_{\max}$.

2.4.4 Choix des ailettes

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une densité de flux importante dans un encombrement réduit, exemples : radiateur d'automobile, carter de moteur refroidi par air, évaporateur de climatiseur...

D'une façon générale, l'usage des ailettes est :

- Peu utile pour les liquides car h est grand.
- Utile dans le cas des gaz car h est faible.

Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées mais on est limité par les pertes de charges (elles augmentent si l'on diminue trop l'écartement des ailettes). L'ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique λ est élevée. Le choix des ailettes est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.