A.2.3 : Transformation de Laplace inverse

Méthode analytique

La transformée de Laplace θ(p) de la fonction T(t) est donnée par : $L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^\infty \exp(-p\,t)\, T(t)\, dt$

Il n'existe pas de formule analytique générale permettant de calculer T(t) connaissant θ(p). On connait cependant l'expression exacte de T(t) pour certaines fonctions particulières θ(p), on en trouvera des exemples page suivante (cf. Spiegel pour des tables plus complètes). L'utilisation de ces tables associée aux propriétés particulières de la transformation de Laplace inverse rappelées en annexe A.2.2 peut permettre de résoudre un certain nombre de cas. On essaiera toujours de décomposer une fonction complexe en somme, produit, série… de fonctions simples plus facilement inversibles.

Méthodes numériques

Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, on peut employer l'une des deux méthodes numériques suivantes :

Méthode de Stehfest

La transformée inverse de la fonction θ(p) peut se calculer par :

$$T(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^{N} V_j\, \theta_i\left(\frac{j \ln(2)}{t}\right)$$

N = 20 (double précision) :

$V1 = -5{,}511463844797178.10^{-6}$	$V2 = 1{,}523864638447972.10^{-1}$	$V3 = -1{,}174654761904762.10^{2}$
$V4 = 1{,}734244933862434.10^{4}$	$V5 = -9{,}228069289021164.10^{5}$	$V6 = 2{,}37740877871031810.^{7}$
$V7 = -3{,}494211661953704.10^{8}$	$V8 = 3{,}241369852231879.10^{9}$	$V9 = -2{,}027694830723779.10^{10}$
$V10 = 8{,}946482982379724.10^{10}$	$V11 = -2{,}870209211471027.10^{11}$	$V12 = 6{,}829920102815115.10^{11}$
$V13 = -1{,}219082330054374.10^{12}$	$V14 = 1{,}637573800842013.10^{12}$	$V15 = -1{,}647177486836117.10^{12}$
$V16 = 1{,}221924554444226.10^{12}$	$V17 = -6{,}488065588175326.10^{11}$	$V18 = 2{,}333166532137059.10^{11}$
$V19 = -5{,}091380070546738.10^{10}$	$V20 = 5{,}091380070546738.10^{9}$	

N = 10 (simple précision):

V1 = 1/12	V2 = -385/12	V3 = 1279	V4 = -46871/3	V5 = 505465/6	V6 = -473915/2
V7 = 1127735/3	V8 = -1020215/3	V9 = 328125/2	V10 = -65625/2		

Méthode de Fourier

$$T(t) = \frac{\exp(c\,t)}{t_{max}} \left[\frac{\theta(c)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathrm{Re}[\theta(c + j\,\omega_k)] \cos(\omega_k\, t) - \mathrm{Im}[\theta(c + j\,\omega_k)] \sin(\omega_k\, t) \right) \right]$$

Avec $\omega_k = \dfrac{k\,\pi}{t_{max}}$

La somme infinie est dans la pratique calculée pour un nombre de fini N de termes , on prendra en général N > 100. Cette méthode nécessite de choisir deux paramètres : c et t_{max} . On doit s'assurer a posteriori que $\exp(-2\,c\,t_{max})\; T(2\,t_{max}) \approx 0$.

Choix d'une méthode et vérification des résultats

La méthode de Stehfest est plus simple à mettre en oeuvre car elle ne nécessite pas de choisir certains paramètres. La méthode de Fourier peut conduire à un meilleur résultat dans le cas d'inversion de certaines fonctions comme les fonctions périodiques par exemple (cf. Maillet).

L'étude du comportement de la fonction θ(p) aux temps longs (t→∞ soit p→0) et aux temps courts (t→0 soit p→∞) peut conduire à des formules approchées de θ(p) dont on peut alors trouver la transformée de Laplace inverse analytiquement. La comparaison de ces solutions analytiques avec les résultats de l'inversion numérique donne une indication sur la justesse de l'inversion numérique.

A.2.3 : Transformation de Laplace inverse

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$\frac{1}{p}$	1
1	$\delta(t)$ Dirac
$\frac{1}{p+\beta}$	$e^{-\beta t}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{b}{p\left(b+\sqrt{p}\right)}$	$1-\exp\left(b^2\,t\right)\mathrm{erfc}\left(b\sqrt{t}\right)$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$\frac{\ln(p)}{p}$	$-\ln(t)-\gamma \quad ; \quad \gamma = 0{,}57721$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\,t}}$
$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$
$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\mathrm{sh}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\mathrm{ch}(\omega t)$
$\frac{1}{p^n} \quad n = 1, 2, 3...$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$e^{-q\,x}$	$\frac{x}{2\sqrt{\pi\,\alpha\,t^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\,\alpha\,t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{q}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi\,t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\,\alpha\,t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p}$	$\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{pq}$	$2\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p^2}$	$\left(t+\frac{x^2}{2\alpha}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - x\left(\frac{t}{\pi\alpha}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{q+h}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha\alpha}\right) - h\,\alpha\exp\left(hx+\alpha\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{q\,(q+h)}$	$\alpha\exp\left(hx+\alpha\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p\,(q+h)}$	$\frac{1}{h}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \frac{1}{h}\exp\left(hx+\alpha\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{p\,q\,(q+h)}$	$\frac{2}{h}\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha\alpha}\right) - \frac{1+h\,x}{h^2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \frac{1}{h^2}\exp\left(hx+\alpha\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-q\,x}}{(q+h)^2}$	$-2\,h\left(\frac{\alpha^3\,t}{\pi}\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2\,\alpha\,t}\right) + \alpha\left(1+h\,x+2\,h^2\,\alpha\,t\right)\exp\left(h\,x+\alpha\,t\,h^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+h\sqrt{\alpha t}\right)$