



THEORIE ET PRATIQUE DE LA METROLOGIE THERMIQUE

Yves JANNOT

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMETA)

Octobre 2011

METROLOGIE THERMIQUE

SOMMAIRE

NOMENCLATURE	5
1 LES DIFFERENTS TRANSFERTS A TRAVERS UNE PAROI.....	6
1.1 DIFFUSION DE LA CHALEUR.....	6
1.2 DIFFUSION DE LA VAPEUR D'EAU.....	8
1.3 DIFFUSION DE L'AIR	9
1.4 ANALOGIE ENTRE LES DIFFERENTS TRANSFERTS	10
2 MODELISATION DES TRANSFERTS DE CHALEUR.....	12
2.1 MILIEU A TEMPERATURE UNIFORME.....	12
2.2 MILIEU SEMI-INFINI	13
2.3 TRANSFERT UNIDIRECTIONNEL DANS DES MILIEUX LIMITEES : PLAQUE.....	16
2.4 SYSTEMES COMPLEXES : METHODE DES QUADRIPOLES	22
2.4.1 <i>Ecoulement unidirectionnel dans des murs plans</i>	22
2.4.2 <i>Ecoulement radial</i>	25
2.5 CONDUCTION MULTIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE.....	27
2.5.1 <i>Théorème de Von Neuman</i>	27
2.5.1 <i>Transformations intégrales et séparation de variables</i>	27
3 MESURE DE LA TEMPERATURE.....	32
3.1 THERMOMETRE A COLONNE LIQUIDE	32
3.2 THERMOCOUPLE.....	32
3.3 THERMISTANCE	33
3.4 RESISTANCE DE PLATINE.....	34
3.5 DETECTEUR IR.....	34
3.6 CAMERA IR.....	35
3.7 CHOIX D'UNE METHODE DE MESURE.....	35
4 METROLOGIE THERMIQUE : OUTILS ET METHODES	36
4.1 INTRODUCTION	36
4.2 INTERET D'UN MODELE QUADRIPOLAIRE COMPLET.....	36
4.3 ETUDE DE SENSIBILITE.....	39
4.4 METHODE D'ESTIMATION DES PARAMETRES.....	40
4.5 METHODE D'EVALUATION DE LA PRECISION DE L'ESTIMATION	42
4.6 CONCLUSION	43
5 METHODE DE LA PLAQUE CHAUDE GARDEE	44
6 METHODE DU FIL CHAUD	45
6.1 PRINCIPE DE LA METHODE.....	45
6.2 MODELISATION DU FIL CHAUD.....	45
6.3 ESTIMATION DES PARAMETRES	46
6.4 REALISATION PRATIQUE DE LA MESURE	48
6.5 LIMITES DE LA METHODE.....	49
7 METHODE FLASH.....	50

7.1	PRINCIPE DE LA METHODE.....	50
7.2	MODELISATION DE LA METHODE FLASH.....	50
7.3	ESTIMATION DE LA DIFFUSIVITE THERMIQUE.....	52
7.4	REALISATION PRATIQUE DE LA MESURE.....	55
7.5	LIMITES DE LA METHODE.....	56
8	METHODE DU TRICOUCHE.....	57
8.1	INTRODUCTION.....	57
8.2	PRINCIPE ET DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	57
8.3	MODELISATION ET PRINCIPE DE LA METHODE.....	58
8.4	ETUDE DE SENSIBILITE.....	60
8.5	LIMITES DE LA METHODE.....	61
9	METHODES DE TYPE PLAN CHAUD.....	63
9.1	METHODE DU PLAN CHAUD SEMI-INFINI.....	63
9.1.1	<i>Principe de la méthode</i>	63
9.1.2	<i>Modélisation du plan chaud semi-infini</i>	63
9.1.3	<i>Estimation des paramètres</i>	65
9.1.4	<i>Réalisation pratique de la mesure</i>	67
9.1.5	<i>Montage asymétrique</i>	67
9.1.6	<i>Limites de la méthode</i>	68
9.2	METHODE DU PLAN CHAUD FINI AVEC $T_{ARRIERE}$ CONSTANTE.....	69
9.2.1	<i>Principe de la mesure</i>	69
9.2.2	<i>Modélisation</i>	69
9.2.3	<i>Modèles simplifiés 1D</i>	71
9.2.4	<i>Etude de sensibilité</i>	72
9.2.5	<i>Limites de la méthode</i>	74
9.3	METHODE DU PLAN CHAUD ASYMETRIQUE FINI AVEC FACE ARRIERE ISOLEE.....	74
9.3.1	<i>Principe de la mesure</i>	74
9.3.2	<i>Méthode d'estimation simplifiée</i>	76
9.3.3	<i>Domaine de validité de l'hypothèse 1D</i>	77
9.3.4	<i>Validation de la méthode</i>	77
9.3.5	<i>Mise en œuvre et limites</i>	78
10	METHODE DU RUBAN CHAUD PERMANENT.....	79
10.1	INTRODUCTION.....	79
10.2	DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	80
10.3	MODELISATION.....	81
10.4	REALISATION PRATIQUE DE LA MESURE.....	86
10.5	LIMITES DE LA METHODE.....	87
11	METHODE DU HOT DISC.....	89
12	METHODE DE LA MINI-PLAQUE CHAUDE.....	90
12.1	PRINCIPE DE LA MESURE.....	90
12.2	MODELISATION QUADRIPOLAIRE.....	91
12.3	EVALUATION DES INCERTITUDES.....	94
12.4	CONCLUSION.....	95
13	CHOIX D'UNE METHODE.....	97
BIBLIOGRAPHIE.....		98
A.1: PROPRIETES PHYSIQUES DE CERTAINS CORPS.....		102
A.2 : PROPRIETES PHYSIQUES DE L'AIR ET DE L'EAU.....		103
A.3 : TRANSFORMATIONS INTEGRALES : LAPLACE, FOURIER, HANKEL.....		104
A.4 : TRANSFORMATION DE LAPLACE INVERSE.....		105

A.5 : RACINES DE L'EQUATION TRANSCENDANTE	107
A.6 : CHOIX DES TRANSFORMATIONS INTEGRALES	108
A.7 : EQUATIONS ET FONCTIONS DE BESSEL.....	111

NOMENCLATURE

a	Diffusivité thermique
Bi	Nombre de Biot
c	Capacité calorifique
D	Diamètre
e	Épaisseur
E	Effusivité thermique
Fo	Nombre de Fourier
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection
L	Longueur
p	Variable de Laplace
p _e	Périmètre
Q	Quantité de chaleur
r, R	Rayon, Résistance
R _c	Résistance thermique de contact
S	Surface
t	Temps
T	Température
u	Vitesse
V	Volume
x, y, z	Variables d'espace

Lettres grecques

ϕ	Densité de flux de chaleur
Φ	Transformée de Laplace du flux de chaleur
φ	Flux de chaleur
λ	Conductivité thermique, longueur d'onde
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique
θ	Transformée de Laplace de la température

1 LES DIFFERENTS TRANSFERTS A TRAVERS UNE PAROI

1.1 Diffusion de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

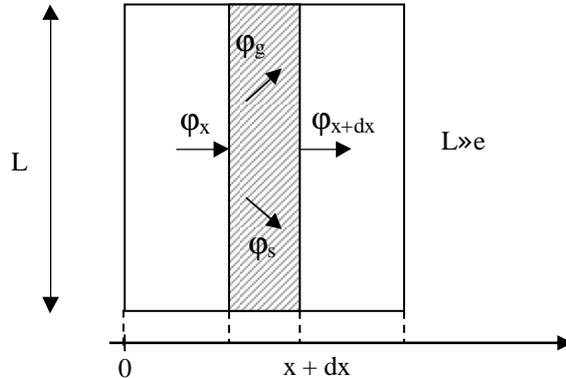


Figure 1.1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox .

Le transfert de chaleur dans le solide s'effectue par conduction, il est régi par la loi de Fourier :

$$\varphi = - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

où : λ Conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)
 S Section de passage du flux (m^2)

Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st}$$

Avec : $\varphi_x = - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x$ et $\varphi_{x+dx} = - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx$$

$$\varphi_{st} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (1.1)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$

- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$
 c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses a) + b) + c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

- d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.2)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la **diffusivité thermique**.

- e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.3)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.4)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t, cette équation peut s'écrire sous forme simplifiée : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$

- Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r T)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.5)$$

Les conditions aux limites peuvent prendre l'une des formes suivantes :

1. A $t = 0$: $T(x, 0) = T_0(x)$ (b)

2. En $z = 0$:
 Si la résistance au transfert de masse à la surface est négligeable $T(0, t) = T_0$ (c)

Dans le cas contraire : $-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(0,t)} = h [T(0, t) - T_\infty]$ (d)

Où : **h** Coefficient de transfert convectif à l'interface ($\text{W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$)
 T_∞ Température du fluide en contact avec le solide (°C)

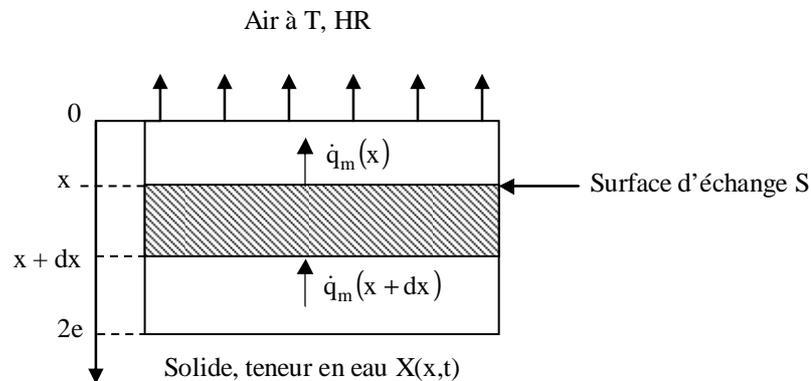
3. Si le milieu est semi-infini : $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_0(x)$ (e)

Si le milieu est d'épaisseur $2e$ avec transfert sur les deux faces, la symétrie impose :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=e/2} = 0 \quad (f)$$

1.2 Diffusion de la vapeur d'eau

Considérons à titre d'exemple le transfert de vapeur unidirectionnel d'un solide vers de l'air à travers une surface d'échange plane :



Le transfert de masse est régi par la 1^{ère} loi de Fick qui s'écrit :

$$\phi_m = -\rho_{ms} D \frac{dX}{dx} \quad (1.6)$$

Avec : ϕ_m Densité de flux massique ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$)
 ρ_{ms} Masse volumique du solide sec ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
D Coefficient de diffusion massique ($\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$)
X Teneur en eau ($\text{kg}_{\text{eau}}\cdot\text{kg}_{\text{ms}}^{-1}$)

Effectuons un bilan de masse entre t et t + dt sur l'élément de volume compris entre x et x + dx :

$$[\phi_m(x) - \phi_m(x + dx)] S dt = \rho_{ms} S dx dX$$

soit : $-\rho_{ms} \left(D \frac{\partial X}{\partial x} \right)_x + \rho_{ms} \left(D \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{x+dx} = \rho_{ms} dx \frac{\partial X}{\partial t}$

D'où la seconde loi de Fick :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial X}{\partial x} \right) = \frac{\partial X}{\partial t} \quad (1.7)$$

Dans le cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas de X, cette expression devient :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (1.8)$$

Cette équation est aisément généralisable à un transfert tridimensionnel et s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial t}$$

Coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la teneur en eau ne dépend que de r et de t , l'équation (1.9) peut s'écrire sous forme simplifiée :
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial t}$$

Coordonnées sphériques

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (1.10)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie sphérique où la teneur en eau ne dépend que de r , l'équation (1.10) peut s'écrire sous forme simplifiée :
$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r X)}{\partial r^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial t}$$

Les conditions aux limites peuvent prendre l'une des formes suivantes :

1. A $t = 0$:
$$X(x, 0) = X_0(x) \quad (b)$$

2. En $x = 0$:
Si la résistance au transfert de masse à la surface est négligeable
$$X(0, t) = X_{eq} \quad (c)$$

Dans le cas contraire :
$$\rho_{ms} D \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)_{(0,t)} = h_m [X(0, t) - X_{eq}] \quad (d)$$

Où : h_m Coefficient de transfert de masse à l'interface ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)
 X_{eq} Teneur en eau d'équilibre du produit avec l'air à (T, HR)

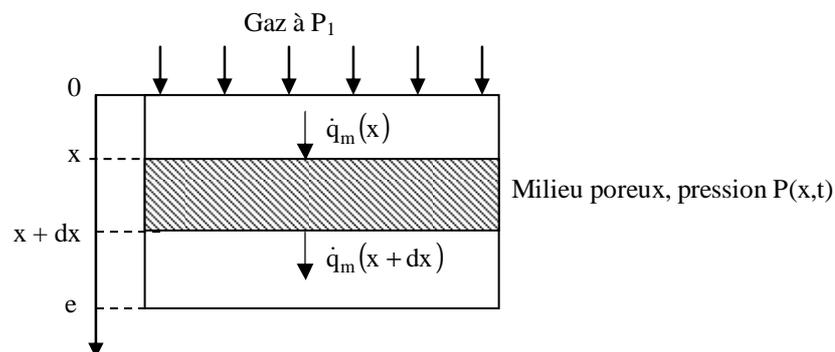
3. Si le milieu est semi-infini :
$$\lim_{x \rightarrow \infty} X^*(x, t) = 0 \quad (e)$$

Si le milieu est d'épaisseur $2e$ avec transfert sur les deux faces, la symétrie impose :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_{x=e/2} = 0 \quad (f)$$

1.3 Diffusion de l'air

Considérons à titre d'exemple le transfert unidirectionnel d'un gaz vers un solide :



Le transfert de masse est régi par la loi de Darcy qui s'écrit :

$$\Phi_{ma} = - \frac{k S}{\nu} \frac{dP}{dx} \quad (1.12)$$

Avec : φ_{ma} Flux massique (kg.s^{-1})
k Perméabilité du solide (m^2)
 ν Viscosité cinématique du gaz
P Pression (Pa)

Effectuons un bilan de masse entre t et $t + dt$ sur l'élément de volume compris entre x et $x + dx$:

$$[\varphi_{ma}(x) - \varphi_{ma}(x + dx)] dt = \varepsilon S dx dp$$

où : ε Porosité du solide

$$\text{soit : } -\frac{k}{\nu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_x + \frac{k}{\nu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+dx} = \varepsilon dx \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits : $P = \rho \frac{R}{M} T$ il vient : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{M}{R T} \frac{\partial P}{\partial t}$ et sachant que : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$-\frac{k M}{\mu R T} \left(P \frac{\partial P}{\partial x} \right)_x + \frac{k M}{\mu R T} \left(P \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x+dx} = \varepsilon dx \frac{M}{R T} \frac{\partial P}{\partial t}$$

on en déduit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon \mu}{k P} \frac{\partial P^2}{\partial t}} \quad (1.13)$$

Les conditions aux limites peuvent prendre les formes suivantes :

1. A $t = 0$: $P(x, 0) = P_0(x)$ (b)

2. En $x = 0$:
 Si la résistance au transfert de masse à la surface est négligeable $P(0, t) = P$ (c)

3. Si le milieu est semi-infini : $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, t) = P_0$ (d)

Si le milieu est d'épaisseur $2e$ avec transfert sur les deux faces, la symétrie impose :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=e/2} = 0 \quad (e)$$

Si P_0 est la pression uniforme dans un milieu poreux à l'instant $t = 0$ et si l'on se place dans un intervalle de temps dans lequel $P(t)$ a varié faiblement (quelques %), on peut écrire l'équation (1.13) sous la forme simplifiée suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon \mu}{k P_0} \frac{\partial P^2}{\partial t}} \quad (1.14)$$

1.4 Analogie entre les différents transferts

Les équations régissant les transferts de chaleur, de vapeur d'eau et d'air présentent de fortes similitudes mises en évidence dans le tableau 1.

L'évolution de la température, de l'humidité et de la pression à l'intérieur d'un local résulte des différents transferts qui se produisent à travers ses parois. Le tableau 1 permet de faire l'inventaire des données physiques caractéristiques de la paroi qu'il faut connaître pour calculer les différents flux la traversant :

- Conductivité thermique ($\text{W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$)
- Diffusivité thermique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

- Coefficient de transfert de chaleur par convection ($W.m^{-2}.^{\circ}C^{-1}$)
- Diffusivité à la vapeur d'eau ($m^2.s^{-1}$)
- Teneur en eau d'équilibre X_{eq} ($kg_{eau}.kg_{ms}^{-1}$)
- Masse volumique du matériau sec ($kg.m^{-3}$)
- Coefficient de transfert de masse ($kg.m^{-2}.s^{-1}$)
- Perméabilité à l'air (m^2)
- Porosité

Tableau 1.1 : Analogies entre les différents modes de transferts

Chaleur	Vapeur eau	Air
Potentiel : T	Potentiel : X	Potentiel : P ²
Loi de Fourier $\phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$	1 ^{ère} loi de Fick $\phi_m = -\rho_{ms} D S \frac{dX}{dx}$	Loi de Darcy $\phi_{ma} = -\frac{k S}{2 P v} \frac{dP^2}{dx}$
Equation de la chaleur $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$	2 ^{ème} loi de Fick $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial t}$	Si faible variation de P et GP : $\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{k P_0} \frac{\partial P^2}{\partial t}$
Conductivité thermique λ	Conductivité massique $\rho_{ms} D$	Conductivité massique $\frac{k}{2 P_0 v}$
Diffusivité thermique a	Diffusivité massique D	Diffusivité massique $\frac{k P_0}{\epsilon \mu}$
Effusivité thermique $E = \sqrt{\lambda \rho c} = \frac{\lambda}{\sqrt{a}}$	Effusivité massique $E_m = \frac{\rho_{ms}}{\sqrt{D}}$	Effusivité massique $E_{ma} = \frac{\rho}{2 P} \sqrt{\frac{k \epsilon}{\mu P_0}}$
Loi de Newton $\phi = h S (T - T_{\infty})$	$\phi_m = h_m S (X - X_{eq})$	

2 MODELISATION DES TRANSFERTS DE CHALEUR

2.1 Milieu à température uniforme

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est a priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser. Soit par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et $t + dt$:

$$-hS(T - T_0) = \rho c V \frac{dT}{dt} \quad \text{soit :} \quad \frac{dT}{T - T_0} = -\frac{hS}{\rho c V}$$

D'où :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho c V} t\right) \quad (2.1)$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho c V}{hS}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système :

$$\tau = \frac{\rho c V}{hS} \quad (2.2)$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet : $\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec :

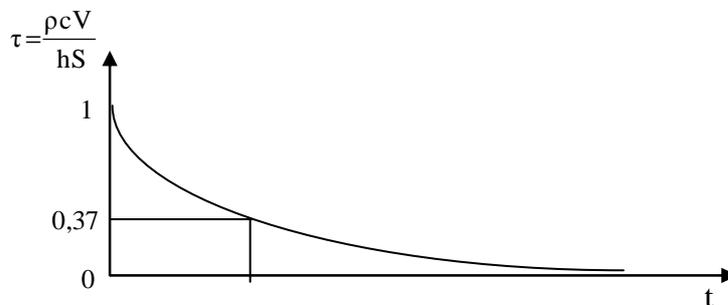


Figure 2.1 : Evolution de la température d'un milieu à température uniforme

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, deux nombres adimensionnels sont particulièrement importants en régime variable :

- Le nombre de Biot : $Bi = \text{nombre de Biot} = \frac{\text{Résistance thermique interne}}{\text{Résistance thermique externe}} = \frac{\frac{\ell}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}}$, ℓ est la dimension caractéristique du milieu, $\ell = r$ pour une sphère.

Soit :

$$Bi = \frac{h \ell}{\lambda} \quad (2.3)$$

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque $Bi < 0,1$.

- Le nombre de Fourier :

$$Fo = \frac{a t}{\ell^2} \quad (2.4)$$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp(-Bi Fo) \quad (2.5)$$

La connaissance des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère. On considère généralement qu'un système tel que $Bi < 0,1$ peut être considéré comme étant à température uniforme, le critère $Bi < 0,1$ est appelé le critère d'« accommodation thermique ».

2.2 Milieu semi-infini

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face (vrai tout le temps que la température de l'autre face n'a pas varié).

Température constante imposée en surface

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i . On impose brutalement la température T_0 sur sa surface, cette condition limite est appelée condition de Dirichlet :

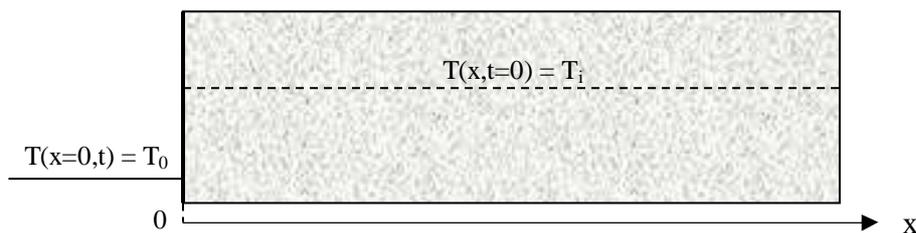


Figure 2.2 : Schéma du milieu semi-infini avec température de surface imposée

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(x=0, t) = T_0 & (c) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_i & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$

D'où :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation (a) peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(x=0,t) = 1 & (c) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x,t) = 0 & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace (cf. annexe A.3 sur les transformations intégrales) de $\bar{T}(x,t)$ par rapport au temps s'écrit : $\theta(x,p) = L\{\bar{T}(t)\} = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \bar{T}(x,t) dt$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : $\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p\theta - \bar{T}(x,0)] = 0$ avec $\bar{T}(x,0) = 0$

Cette équation est donc de la forme : $\frac{d^2\theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0$ avec $q^2 = \frac{p}{a}$

D'où : $\theta(x,p) = A e^{-qx} + B e^{+qx}$, la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc $B = 0$, nous en déduisons que $\theta(x,p) = A e^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation (c) conduit à : $\theta(0,p) = \frac{1}{p}$ d'où $A = \frac{1}{p}$ et $\theta = \frac{e^{-qx}}{p}$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.4 conduit au résultat suivant :

$$\boxed{\frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)} \quad (2.6)$$

Avec : $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-u^2) du$, la fonction erf est aussi appelée la fonction erreur.

Flux imposé

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur à la surface du milieu semi-infini, cette condition limite est appelée condition de Neumann.

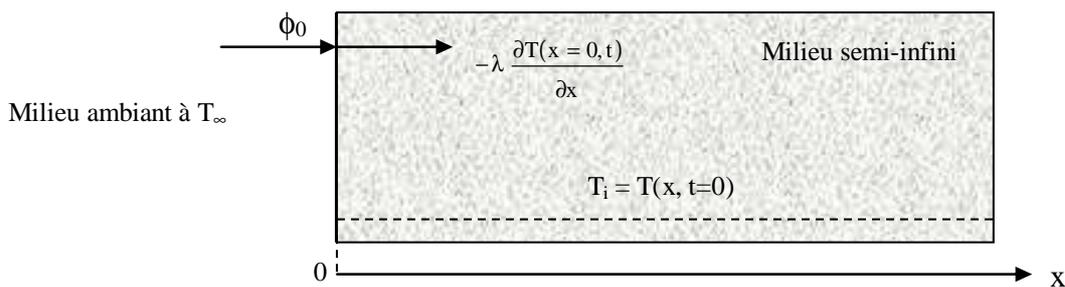


Figure 2.3 : Schéma du milieu semi-infini avec flux surfacique imposé

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ (a)

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ T(\infty,t) = T_i & (c) \\ -\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \phi_0 & (d) \end{cases}$$

Cette dernière condition traduit la conservation du flux de chaleur au niveau de la surface du milieu semi-infini.

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

$$\text{D'où : } \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{L'équation (a) peut alors s'écrire : } \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

$$\text{Et les conditions aux limites deviennent} \quad \begin{cases} \bar{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(\infty, t) = 0 & (c) \\ -\lambda \frac{\partial \bar{T}(0,t)}{\partial x} = \phi_0 & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x,0)] = 0$ avec $\bar{T}(x,0) = 0$

D'où : $\theta(x, p) = A e^{-qx} + B e^{+qx}$, la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc $B = 0$, et nous en déduisons que $\theta(x, p) = A e^{-qx}$

$$\text{La transformée de Laplace de l'équation (d) s'écrit : } \frac{\phi_0}{p} = -\lambda \frac{d\theta}{dx}(x=0)$$

$$\text{D'où : } A = \frac{\phi_0}{\lambda p q} \quad \text{et} \quad \theta(x, p) = \frac{\phi_0}{\lambda} \frac{e^{-qx}}{p q}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.4 conduit au résultat suivant :

$$\boxed{\bar{T}(x, t) = T(x, t) - T_i = \frac{2\phi_0}{\lambda} \sqrt{a t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a t}}\right)} \quad (2.7)$$

$$\text{Avec : } \operatorname{ierfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u [1 - \operatorname{erf}(u)]$$

Coefficient de transfert imposé

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

On considère le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le milieu semi-infini et le milieu ambiant est imposé, cette condition limite est appelée condition de Newton :

$$\text{L'équation de la chaleur s'écrit : } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

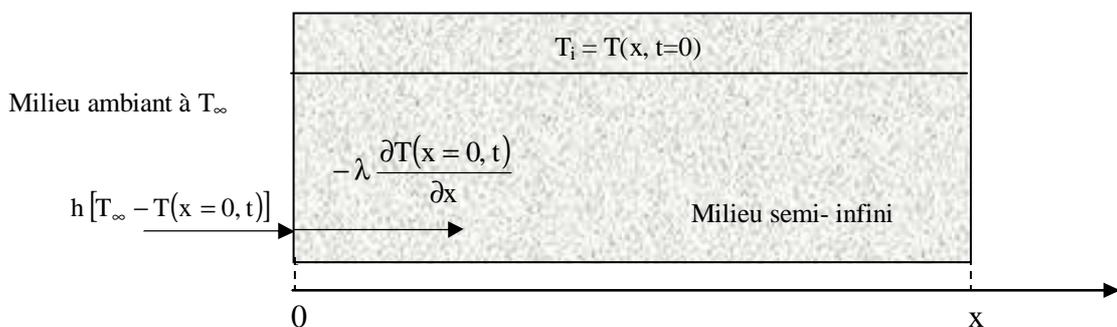


Figure 2.4 : Schéma du milieu semi-infini avec coefficient de transfert convectif imposé

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(\infty, t) = T_i & (c) \\ -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h [T_\infty - T(x=0, t)] & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

D'où : $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$

L'équation (a) peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(\infty, t) = 0 & (c) \\ \lambda \frac{\partial \bar{T}(0, t)}{\partial x} = h [\bar{T}(x=0, t) - (T_\infty - T_i)] & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x, 0)] = 0$ avec $\bar{T}(x, 0) = 0$

D'où : $\theta(x, p) = A e^{-qx} + B e^{+qx}$

La température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B = 0 et $\theta(x, p) = A e^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation (d) s'écrit : $\lambda \frac{d\theta}{dx}(0, p) = h \theta(0, p) + \frac{h(T_i - T_\infty)}{p}$

Soit : $\lambda A q = -h A + \frac{h(T_i - T_\infty)}{p}$ d'où : $A = \frac{\frac{h}{\lambda}(T_i - T_\infty)}{p\left(\frac{h}{\lambda} + q\right)}$

et $\theta(x, p) = \ell (T_i - T_\infty) \frac{e^{-qx}}{p(q + \ell)}$ où $\ell = \frac{h}{\lambda}$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.4 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp\left(\frac{hx}{\lambda} + \frac{ah^2t}{\lambda^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{h\sqrt{at}}{\lambda}\right) \quad (2.8)$$

2.3 Transfert unidirectionnel dans des milieux limités : plaque

On considère le cas d'une plaque d'épaisseur 2L et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel. L'étude de ce cas permettra d'illustrer les différentes méthodes utilisées pour résoudre l'équation de la chaleur monodimensionnelle en régime variable.

Pour illustrer les différentes méthodes de résolution utilisables, nous traiterons ici le cas d'une plaque avec température constante imposée en surface

1^{ère} méthode : Transformée de Laplace, développement en série et inversion terme à terme par les tables.

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$

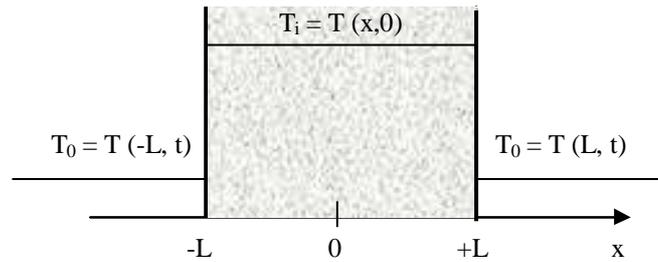


Figure 2.5 : Schéma d'une plaque avec température imposée en surface

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(L, t) = T(-L, t) = T_0 & (c) \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

d'où : $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}$

L'équation (a) peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(x = L, t) = \bar{T}(x = -L, t) = T_0 - T_i & (c) \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(0, t) = 0 & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $\bar{T}(x, t)$ par rapport au temps s'écrit : $\theta(x, p) = L\{\bar{T}(t)\} = \int_0^\infty \exp(-p t) \bar{T}(x, t) dt$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x, 0)] = 0$ avec $\bar{T}(x, 0) = 0$

Cette équation est donc de la forme : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0$ avec $q^2 = \frac{p}{a}$

D'où : $\theta(x, p) = A \cosh(qx) + B \sinh(qx)$

La transformée de Laplace de l'équation (d) conduit à : $\lambda \frac{d\theta}{dx}(x=0) = 0$ d'où $B = 0$ et $\theta = A \cosh(qx)$

La transformée de Laplace de l'équation (c) conduit à : $\theta(L, p) = \frac{T_0 - T_i}{p}$ d'où $A = \frac{T_0 - T_i}{p \cosh(qL)}$

et $\theta(x, p) = \frac{(T_0 - T_i) \cosh(qx)}{p \cosh(qL)} = \frac{\Delta T \cosh(qx)}{p \cosh(qL)}$

Nous pouvons utiliser un développement en série de $\frac{1}{1 + e^{-2qL}}$ pour écrire $\theta(x, p)$ sous la forme :

$$\theta(x, p) = \frac{\Delta T}{p} \frac{e^{qx} + e^{-qx}}{e^{qL}(1 + e^{-2qL})} = \frac{\Delta T}{p} [e^{-q(L-x)} + e^{-q(L+x)}] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nqL}$$

$$\theta(x, p) = \frac{\Delta T}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-q[(2n+1)L-x]} + \frac{\Delta T}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-q[(2n+1)L+x]}$$

La transformation inverse de Laplace terme à terme (propriété de linéarité) conduit à :

$$\frac{T - T_i}{T_0 - T_i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)L - x}{2\sqrt{at}} \right] + (T_0 - T_i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)L + x}{2\sqrt{at}} \right] \quad (2.9)$$

Cette solution converge rapidement pour les faibles valeurs de t .

2^{ème} méthode : Décomposition de la température en un produit de fonctions et superposition des solutions.

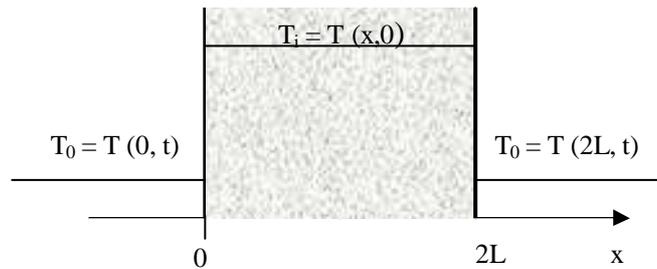


Figure 2.6 : Schéma d'une plaque avec température imposée en surface

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(0, t) = T(2L, t) = T_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_0$

L'équation (a) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = T_i - T_0 & (b) \\ \bar{T}(x = 0, t) = \bar{T}(x = 2L, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

On peut aussi considérer par raison de symétrie une plaque d'épaisseur L en prenant une condition de flux nul en $x = L$ soit pour la seconde condition limite : $\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = 0$ (d)

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $T(x, t) = X(x)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y = \frac{1}{a} XY' \quad \text{ou} : \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{a} \frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

Où ω est une constante car les deux fonctions X et Y dépendent l'une de x et l'autre de t . Nous en déduisons :

$$\begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X = A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x) \\ Y' + a \omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y = C e^{-a\omega^2 t} \end{cases}$$

Et $\bar{T}(x, t) = e^{-a\omega^2 t} [A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)]$

La condition limite $\bar{T}(0, t) = 0$ s'écrit alors : $A = 0$

d'où : $\bar{T}(x, t) = B \sin(\omega x) e^{-a\omega^2 t}$, les fonctions $\psi_n(x) = \sin(\omega_n x)$ sont les fonctions propres du système.

La condition limite $\frac{\partial \bar{T}(L, t)}{\partial x} = 0$ pour tout t s'écrit alors : $B \cos(\omega L) = 0$

Cette équation admet une infinité de solutions que l'on appelle les valeurs propres : $\omega_n = (2n+1) \frac{\pi}{2L}$ avec n variant de 0 à l'infini.

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale de (a) sous la forme :

$$\bar{T}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x) \exp(-a \omega_n^2 t)$$

La méthode générale de résolution est la suivante :

Les termes D_n sont déterminés en calculant $\int_0^L \bar{T}(x, 0) \psi_m(\omega_n x) dx$ de deux manières :

- En remplaçant $\bar{T}(x, 0)$ par son expression déduite des données du système à l'état initial : $\bar{T}(x, 0) = T_i(x)$ (g)
- En remplaçant $\bar{T}(x, 0)$ par $\bar{T}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x)$, on obtient la somme infinie :

$$\int_0^L \bar{T}(x, 0) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L D_n \psi_n(\omega_n x) \psi_m(\omega_m x) dx$$

On montre que si $n \neq m$ alors $\int_0^L \psi_n(\omega_n x) \psi_m(\omega_m x) dx = 0$ (orthogonalité des fonctions propres)

$$\text{donc : } \int_0^L \bar{T}(x, 0) dx = \int_0^L D_n \psi_m^2(\omega_m x) dx \quad (h)$$

On détermine la valeur des constantes D_m en égalant les expressions (g) et (h).

Appliquons cette méthode à l'exemple traité :

$$\text{On a : } \int_0^L \bar{T}(x, 0) \psi_m(\omega_n x) dx = \int_0^L (T_i - T_0) \sin(\omega_n x) dx = \frac{T_i - T_0}{\omega_n}$$

$$\text{et : } \int_0^L \bar{T}(x, 0) \psi_m(\omega_m x) dx = \int_0^L D_m \sin^2(\omega_m x) dx = D_m \int_0^L \sin^2(\omega_m x) dx = D_m \frac{L}{2}$$

$$\text{On en déduit : } D_m = \frac{2(T_i - T_0)}{\omega_n L} = \frac{4(T_i - T_0)}{(2n+1)\pi}$$

et finalement :

$$\bar{T}(x, t) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[(2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right] \exp\left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{at}{L^2}\right] \quad (2.7)$$

Cette solution converge pour un petit nombre de termes pour les valeurs élevées de t (le premier terme peut suffire pour t élevé).

Remarque : Dans le cas de l'utilisation des coordonnées cylindriques on calculera plutôt l'intégrale :

$$\int_0^L \bar{T}(r, 0) r \psi_m(\omega_n r) dr \text{ pour déterminer la valeur des constantes } D_m.$$

Une autre méthode moins générale consiste à écrire la condition limite $\bar{T}(x, 0) = T_i - T_0$ sous la forme :

$\bar{T}(x, 0) = T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left[(2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right]$ et à utiliser ensuite un développement en série de Fourier de la condition initiale sur le domaine.

En effet, une fonction f définie sur $[0, L]$ peut s'écrire sous forme d'une série de Fourier en sinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Nous pouvons effectuer un développement en série de Fourier en sinus de $f(x) = (T_i - T_0)$ sur l'intervalle $[0, 2L]$:

$$T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L} \left[\int_0^{2L} (T_i - T_0) \sin\left(\frac{n\pi u}{2L}\right) du \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L} (T_i - T_0) \frac{-2L}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi u}{2L}\right) \right]_0^{2L} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(T_i - T_0)}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(T_i - T_0)}{(2n+1)\pi} 2 \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$

$$T_i - T_0 = \frac{4(T_i - T_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$

Par identification, nous en déduisons : $D_n = \frac{4(T_i - T_0)}{\pi(2n+1)}$, nous retrouvons le résultat établi précédemment.

3^{ème} méthode : Utilisation d'une transformation intégrale sur la variable d'espace.

Principe de l'utilisation d'une transformée intégrale à la résolution de l'équation de la chaleur :

On applique à l'équation de la chaleur et aux équations résultantes des conditions aux limites une transformation intégrale permettant d'obtenir une nouvelle équation différentielle dont la résolution (plus aisée) conduit à l'expression de la température θ dans l'espace transformé. On applique ensuite à θ la transformation inverse pour obtenir l'expression de la température T dans l'espace réel.

Le choix de la transformation intégrale la mieux adaptée dépend de la configuration et des conditions aux limites. Si la température dépend de la variable d'espace r , on choisit une transformation du type suivant :

$$\theta(\omega) = \int_D w(r) T_{\omega}(r, \omega) T(r, t) dr$$

où D est le domaine de définition de la température et $T_{\omega}(r, t)$ est une fonction propre solution du système formé par l'équation de la chaleur et les conditions aux limites pour un nombre infini de valeurs ω_n ($n = 1, 2, \dots$). L'équation dont les ω_n sont solutions est appelée l'équation transcendante. La fonction $w(r)$ est choisie constante et égale à 1 en géométrie rectangulaire et égale à r en géométrie cylindrique. La formule générale d'inversion est alors la suivante :

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{\omega_n}(\omega_n, r)}{N(\omega_n)} \theta(\omega_n) \quad \text{avec :} \quad N(\omega_n) = \int_D [T_{\omega_n}(\omega_n, r)]^2 w(r) dr$$

$N(\omega_n)$ est appelée la norme de la fonction propre $T_{\omega}(r, t)$.

On trouvera en annexe A.3 la définition et les propriétés des transformations les plus utilisées : Laplace, Fourier et Hankel. On trouvera également en annexe A.6 un tableau donnant les fonctions propres et leurs normes, les équations transcendantes et les valeurs propres pour les cas de figure les plus courants.

On applique cette méthode au cas de figure schématisé sur la figure 3.9.

$$\text{L'équation de la chaleur s'écrit :} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

$$\text{Avec les conditions aux limites :} \quad \begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(0, t) = T(2L, t) = T_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

Selon l'annexe A.6, la fonction propre est $T_{\omega}(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, on applique donc une transformation (finie car le milieu est fini) de Fourier en sinus (cf. annexe A.3) à l'équation (a) :

$$F_s[a] \Rightarrow \frac{n\pi}{L} [\bar{T}(0) - (-1)^n \bar{T}(L)] - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \theta_s(n) = \frac{1}{a} \frac{d\theta_s}{dt}(n) \text{ avec } \bar{T}(x=0) = \bar{T}(x=2L) = T_0 - T_i$$

$$\text{d'où : } \frac{n\pi(T_0 - T_i)}{L} [1 - (-1)^n] - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \theta_s(n) = \frac{1}{a} \frac{d\theta_s}{dt}(n)$$

$$\text{La solution générale de cette équation s'écrit : } \theta_s(n) = \frac{L(T_0 - T_i)}{n\pi} [1 - (-1)^n] + A \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a t}{L^2}\right)$$

$$\text{La condition limite } \bar{T}(x, t=0) = 0 \text{ conduit à : } \theta_s(n) = \frac{L(T_0 - T_i)}{n\pi} [1 - (-1)^n] + \left[1 - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a t}{L^2}\right)\right]$$

La transformée inverse permet de calculer T(x,t) :

$$T(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n] + \left[1 - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a t}{L^2}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$T(x, t) = \frac{4(T_0 - T_i)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{L^2}\right)\right] \sin\left(\frac{[2n+1]\pi x}{L}\right)$$

Un développement de la fonction constante et égale à 1 en série de sinus permet de retrouver le résultat de la 2^{ème} méthode.

4^{ème} méthode : Transformation de Laplace, résolution et inversion par la méthode de Stehfest .

Nous avons montré en appliquant la 1^{ère} méthode que la transformée de la température T(x,t) - T_i s'écrit :

$$\theta(x, p) = \frac{(T_0 - T_i) \cosh(qx)}{p \cosh(qL)} = \frac{\Delta T \cosh(qx)}{p \cosh(qL)} \text{ avec } q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

La température T(x,t) peut s'en déduire en appliquant la méthode de Stehfest pour trouver la transformée de Laplace inverse de $\theta(x, p)$:

$$T(x, t) = T_i + \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^N V_j \theta\left(x, \frac{j \ln(2)}{t}\right) \quad (2.11)$$

Un nombre de termes N=10 est suffisant pour obtenir une précision satisfaisante. Les valeurs des coefficients V_j correspondants sont donnés en annexe A.4.

Comparaison des méthodes :

La méthode permettant d'arriver le plus simplement à une valeur de T(x,t) est la 4^{ème} méthode qui ne fournit toutefois qu'une solution numérique approchée de la solution et qui n'est pas à l'abri d'instabilités numériques dans certains cas très particuliers. Un nombre de termes N = 10 dans la formule (2.11) permet d'obtenir une précision satisfaisante. Viennent ensuite par ordre de difficulté croissante la 1^{ère} méthode puis la 2^{ème} et la 3^{ème} méthode.

Le premier terme de la formule (2.9) représente bien la température aux temps courts alors que le premier terme de la formule (2.10) représente bien la température aux temps longs.

On trouvera à titre d'illustration sur la figure 2.8 la représentation de la température réduite $\frac{T(x, t) - T_i}{T_0 - T_i}$ à 2,5 cm du bord d'une plaque d'épaisseur 10cm pour un matériau de diffusivité $a = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

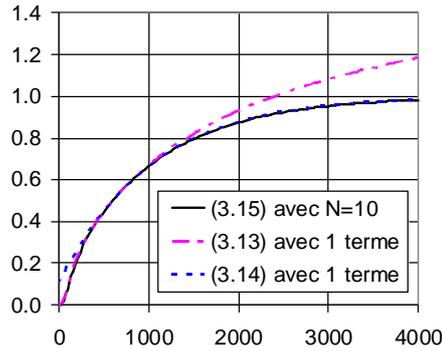


Figure 2.8 : Température réduite dans une plaque calculée par les différentes relations

2.4 Systèmes complexes : méthode des quadripôles

Dans ce paragraphe, on notera :

- $\theta(x,p)$ la transformée de Laplace de la température $T(x,t)$.
- $\Phi(x,p)$ la transformée de Laplace du flux de chaleur $\varphi(x,t)$.

On trouvera en annexe A.7 un récapitulatif des matrices quadripolaires associées aux systèmes les plus couramment rencontrés dans la pratique.

2.4.1 Ecoulement unidirectionnel dans des murs plans

Mur simple

On considère le cas d'un transfert de chaleur unidirectionnel dans un mur d'épaisseur e .

La température $T(x,t)$ au sein du mur vérifie l'équation :
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (a) on obtient :
$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{p}{a} \theta \quad (b) \quad \text{si } T(x,0) = 0.$$

Où $\theta(x,p)$ est la transformée de Laplace de la température $T(x,t)$ (cf. annexe A.3.1).

L'équation (b) admet une solution de la forme : $\theta(x,p) = k_1(p) \cosh(qx) + k_2(p) \sinh(qx)$ avec $q^2 = \frac{p}{a}$

La transformée de Laplace du flux en un point quelconque du mur s'écrit :

$$\Phi(x,p) = L\left[-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right] = -\lambda S L\left[\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right] = -\lambda S \frac{d\theta}{dx}(x,p) \quad (c)$$

Cette relation permet d'exprimer $\Phi(x,p)$ en fonction de $k_1(p)$, $k_2(p)$ et x :

$$\Phi(x,p) = -\lambda S k_1 q \sinh(qx) - \lambda S k_2 q \cosh(qx) \quad (d)$$

Les relations (b) et (d) peuvent être écrites en $x = 0$ et en $x = e$, on obtient :

$$\begin{aligned} \theta(0,p) &= k_1 & \Phi(0,p) &= -\lambda S k_2 \\ \theta(e,p) &= k_1 \cosh(qe) + k_2 \sinh(qe) & \Phi(e,p) &= -\lambda S q k_1 \sinh(qe) - \lambda S q k_2 \cosh(qe) \end{aligned}$$

Il est possible d'éliminer k_1 et k_2 entre ces 4 équations ce qui revient par exemple à exprimer (θ_1, Φ_1) en fonction de (θ_2, Φ_2) , on aboutit à :

$$\begin{bmatrix} \theta(0,p) \\ \Phi(0,p) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cosh(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ \lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix}}_{\text{Matrice quadripolaire M}} \begin{bmatrix} \theta(e,p) \\ \Phi(e,p) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

On a la propriété : $\det(M) = 1$ ce qui permet d'établir la relation réciproque :

$$\begin{bmatrix} \theta(e, p) \\ \Phi(e, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(q e) & -\frac{1}{\lambda q S} \sinh(q e) \\ -\lambda q S \sinh(q e) & \cosh(q e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(0, p) \\ \Phi(0, p) \end{bmatrix}$$

On peut par ailleurs établir une analogie entre la propagation d'un courant en régime sinusoïdal et le transfert thermique unidirectionnel en régime transitoire :

Intensité du courant électrique I	→	Flux de chaleur dans l'espace de Laplace $\Phi(x, p)$
Potentiel électrique U	→	Température dans l'espace de Laplace $\theta(x, p)$
Impédance électrique Z	→	Impédance thermique Z

La loi d'Ohm $U_1 - U_2 = R I$ se traduit par : $T_1 - T_2 = R_t \phi$

La loi des noeuds : $\sum I = 0$ se traduit par : $\sum \phi = 0$

Moyennant ces notations, la relation quadripolaire (2.12) peut être représentée par le schéma électrique équivalent de la figure 2.9.

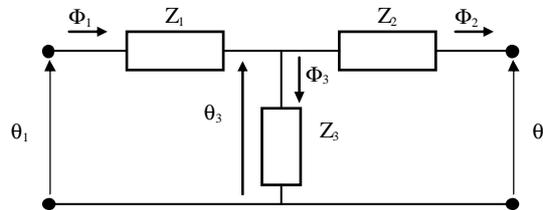


Figure 2.9 : Schéma électrique équivalent à un mur simple en régime variable

Avec dans le cas du mur plan :

$$Z_1 = Z_2 = \frac{\cosh(q e) - 1}{\lambda S q \sinh(q e)} \quad \text{et} \quad Z_3 = \frac{1}{\lambda S q \sinh(q e)}$$

Mur avec échange convectif

On considère le cas d'un mur échangeant de la chaleur par convection avec un fluide (cf. figure 2.10)

La relation $\phi = h S [T_\infty - T_{(x=0)}]$ peut aussi s'écrire : $T_\infty = \frac{\phi}{h S} + T_{(x=0)}$ que l'on peut traduire dans l'espace de

Laplace par : $\theta_\infty = \theta_{(x=0)} + \frac{\Phi}{h S}$ si Φ est la transformée de Laplace du flux ϕ et θ la transformée de Laplace de la température T.

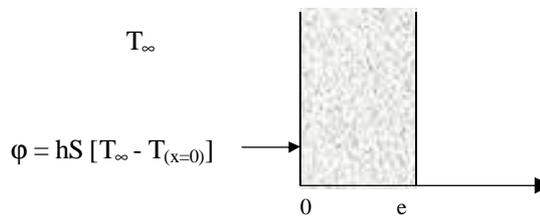


Figure 2.10 : Schématisation d'un mur simple avec transfert convectif

On peut donc écrire sous forme matricielle quadripolaire:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \theta_\infty \\ \Phi_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/hS \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{(x=0)} \\ \Phi_{(x=0)} \end{bmatrix}} \quad (2.13)$$

Résistance de contact entre 2 murs

Considérons maintenant le cas du transfert de chaleur à travers une résistance de contact R à l'interface entre deux milieux solides tel que représenté sur la figure 2.11.

Le flux de chaleur s'écrit $\varphi = \frac{T_{1(x=0)} - T_{2(x=0)}}{R}$ peut aussi s'écrire : $T_{1(x=0)} = R \varphi + T_{2(x=0)}$ que l'on peut traduire dans l'espace de Laplace par : $\theta_{1(x=0)} = \theta_{2(x=0)} + R \Phi$ si Φ est la transformée de Laplace du flux φ et θ_i la transformée de Laplace de la température T_i .

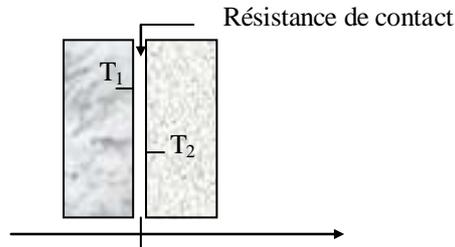


Figure 2.11 : Schéma de deux murs avec résistance de contact

On peut donc écrire sous forme matricielle quadripolaire:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Mur multicouches avec convection et résistances de contact

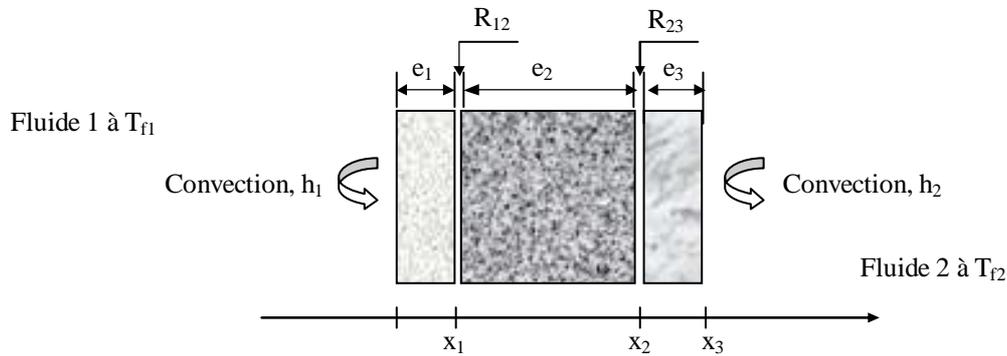


Figure 2.12 : Schéma d'un mur multicouches avec convection et résistances de contact

Les équations matricielles quadripolaires précédemment établies nous permettent d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_{f1} \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/h_1 S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{23} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/h_2 S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{f2} \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

avec : $A_i = D_i = \cosh(q_i e_i)$; $C_i = \lambda_i q_i S \sinh(q_i e_i)$; $B_i = \frac{\sinh(q_i e_i)}{\lambda_i q_i S}$ et $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$

La description du problème sous forme matricielle permet d'en obtenir une formulation très simple ce qui montre tout l'intérêt de la méthode des quadripôles.

Milieu semi-infini

Il a été démontré que la température dans l'espace de Laplace d'un milieu semi-infini s'écrit :

$$\theta(x, p) = A e^{-qx} \quad \text{où} \quad q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

On en déduit la valeur de la transformée de Laplace du flux en un point du milieu semi-infini :

$$\Phi(x, p) = -\lambda S \frac{d\theta}{dx} = \lambda q S e^{-qx} = \lambda q S \theta$$

$$\text{Avec} \quad q = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{\rho c p}{\lambda}}$$

$$\Phi \text{ peut donc aussi s'écrire : } \Phi = \lambda q S \theta = \lambda \sqrt{\frac{\rho c p}{\lambda}} S \theta = \sqrt{\lambda \rho c} S \sqrt{p} \theta = E S \sqrt{p} \theta$$

Où E est l'effusivité thermique.

On pourra donc écrire en tout point d'un milieu semi-infini :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ E S \sqrt{p} \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Mur à température uniforme

Dans le cas d'un "système mince" : mur dont l'épaisseur et/ou la conductivité thermique permettent de considérer sa température comme uniforme ($Bi < 0,1$), la différence entre le flux de chaleur entrant et le flux de chaleur sortant du système s'écrit simplement :

$$\phi_1 - \phi_2 = \rho c V \frac{dT}{dt} \quad \text{soit en appliquant la transformée de Laplace : } \Phi_1 - \Phi_2 = \rho c V p \theta$$

Ce qui peut se traduire sous forme quadripolaire par la relation :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho c V p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.4.2 Ecoulement radial

Cylindre creux

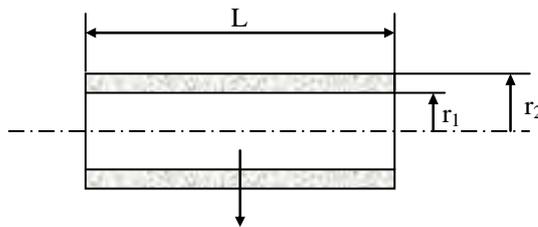


Figure 2.13 : Schéma du cylindre creux

On montre de la même manière (Maillet et al, 2000) que les températures et les flux dans l'espace de Laplace peuvent être reliés par une relation quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} \theta(r_1, p) \\ \Phi(r_1, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(r_2, p) \\ \Phi(r_2, p) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$A = q r_2 [K_1(q r_2) I_0(q r_1) + K_0(q r_1) I_1(q r_2)]$$

$$B = \frac{L}{2 \pi \lambda l} [K_0(q r_1) I_0(q r_2) - K_0(q r_2) I_0(q r_1)]$$

$$C = 2 \pi L \rho c p r_1 r_2 [K_1(q r_1) I_1(q r_2) - K_1(q r_2) I_1(q r_1)]$$

$$D = q r_1 [K_0(q r_2) I_1(q r_1) + K_1(q r_1) I_0(q r_2)]$$

I_0, I_1, K_0 et K_1 étant des fonctions de Bessel (cf. Annexe A7). Le déterminant de la matrice quadripolaire est égal à 1.

Cylindre creux semi-infini

Comme dans le cas du mur plan, on montre que l'on peut écrire en tout point d'un cylindre creux semi-infini ($r_2 \rightarrow \infty$) (Maillet et al, 2000) :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 2\pi\lambda L \frac{q r_1 K_1(q r_1)}{K_0(q r_1)} \theta \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Sphère creuse

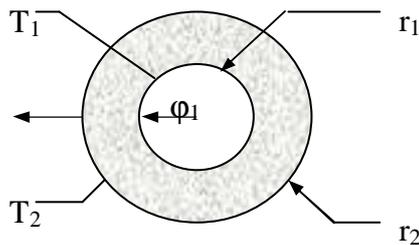


Figure 2.14 : Schéma de la sphère creuse

On montre de la même manière que pour un mur plan (Maillet et al, 2000) que les températures et les flux dans l'espace de Laplace peuvent être reliés par une relation quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} \theta(r_1, p) \\ \Phi(r_1, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(r_2, p) \\ \Phi(r_2, p) \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{r_2}{r_1} \cosh(p) - \frac{\sinh(p)}{q r_1}$$

$$B = \frac{\sinh(p)}{4\pi\lambda q r_1 r_2}$$

$$C = 4\pi\lambda r_2 \left[\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \cosh(p) + \left(q r_1 - \frac{1}{q r_2} \sinh(p)\right) \right]$$

$$D = \frac{r_1}{r_2} \cosh(p) + \frac{\sinh(p)}{q r_2}$$
(2.19)

Le déterminant de la matrice quadripolaire est égal à 1.

Sphère creuse semi-infinie

Comme dans le cas du mur plan, on montre que l'on peut écrire en tout point d'une sphère creuse semi-infinie ($r_2 \rightarrow \infty$) :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 4\pi\lambda r_1 (1 + q r_1) \theta \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.5 Conduction multidirectionnelle en régime variable

2.5.1 Théorème de Von Neuman

Certains problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels peuvent être résolus par combinaison de 2 ou 3 solutions monodimensionnelles. Considérons par exemple le cas d'une barre rectangulaire infinie (longueur très grande devant les côtés $2L_1$ et $2L_2$), elle peut être considérée comme l'intersection de deux plaques infinies d'épaisseurs respectives $2L_1$ et $2L_2$. Le théorème de Von Neumann permet d'affirmer que la température adimensionnelle de cette barre s'exprime comme le produit des températures adimensionnelles des deux plaques infinies dont elle peut être considérée comme étant l'intersection :

$$\left[\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{barre } 2L_1 \times 2L_2} = \left[\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L_1} \times \left[\frac{T(y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L_2} \quad (2.21)$$

Remarques :

- Il faut vérifier que les conditions initiales et aux limites sont satisfaites sous forme adimensionnelle après décomposition de la géométrie considérée en intersection d'éléments simples.
- Des géométries plus complexes peuvent également se décomposer en intersection d'éléments simples, comme par exemple :
 - Cylindre semi-infini = Cylindre infini \cap Milieu semi-infini
 - Barre rectangulaire semi-infinie = Barre rectangulaire infinie \cap Milieu semi-infini
 - Cylindre hauteur $2L$ = Cylindre infini \cap Plaque épaisseur $2L$...

2.5.1 Transformations intégrales et séparation de variables

Les problèmes de transfert multidirectionnel de la chaleur peuvent dans certains cas être traités comme en unidirectionnel par transformations intégrales et séparation de variables. Nous traiterons simplement ici à titre d'exemple le transfert de chaleur dans un cylindre fini d'épaisseur e et de rayon R , initialement à température uniforme, lorsque l'une de ses faces est soumise à une densité de flux de chaleur uniforme $\phi_0(t)$. Le cylindre échange de la chaleur par convection sur toutes ses faces avec le milieu environnant (cf. figure 3.30).

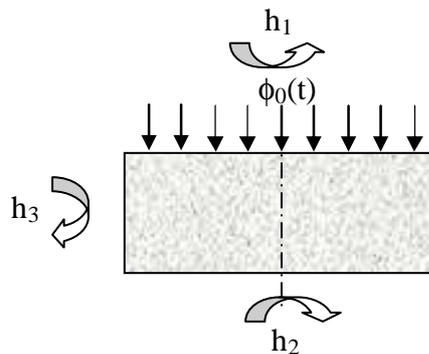


Figure 3.30 : Schéma du système modélisé (Méthode Flash 3D)

Si l'on considère que $\phi_0(t)$ est un Dirac, on retrouve la méthode Flash en 3D. Dans ce cas, $\Phi_0(p) = L[\phi_0(t)] = 1$.

Le problème est à symétrie cylindrique on utilise donc l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \quad (a)$$

La méthode de résolution utilisée est la suivante :

- Transformation de Laplace

- Séparation des variables

$$\text{Conditions limites et initiale : } \begin{cases} \lambda \frac{\partial T(r,0,t)}{\partial z} = h_1 [T(r,0,t) - T_i] - \phi_0(t) & (b) \\ -\lambda \frac{\partial T(r,e,t)}{\partial z} = h_2 [T(r,e,t) - T_i] & (c) \\ \frac{\partial T(0,z,t)}{\partial r} = 0 & (d) \\ -\lambda \frac{\partial T(R,z,t)}{\partial r} = h_3 [T(R,z,t) - T_i] & (e) \\ T(r,z,0) = T_i & (f) \end{cases}$$

On pose $\Delta T(r,z,t) = T(r,z,t) - T_i$ et $L[\Delta T(r,z,t)] = \theta(r,z,p)$

La transformée de Laplace de (a) s'écrit : $\frac{\partial^2 \theta(r,z,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(r,z,p)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta(r,z,p)}{\partial z^2} = \frac{p}{a} \theta(r,z,p)$

On écrit la température après transformation de Laplace sous la forme suivante : $\theta(r,z,p) = R(r,p) Z(z,p)$

$$\frac{\partial^2 R(r,p) Z(z,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r,p) Z(z,p)}{\partial r} + \frac{\partial^2 R(r,p) Z(z,p)}{\partial z^2} = \frac{p}{a} R(r,p) Z(z,p)$$

$$\frac{1}{R(r,p)} \left(\frac{\partial^2 R(r,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r,p)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Z(z,p)} \frac{\partial^2 Z(z,p)}{\partial z^2} = \frac{p}{a}$$

On en déduit : $\frac{1}{R(r,p)} \left(\frac{\partial^2 R(r,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r,p)}{\partial r} \right) = -\alpha^2$ et : $\frac{1}{Z(z,p)} \frac{\partial^2 Z(z,p)}{\partial z^2} - \gamma^2 = 0$

$$\text{avec : } \gamma^2 = \frac{p}{a} + \alpha^2$$

Les solutions des équations ci-dessus sont :

$$R(r,p) = A J_0(\alpha r) + B Y_0(\alpha r)$$

$$Z(z,p) = C \text{sh}(\gamma z) + D \text{ch}(\gamma z)$$

Application des conditions aux limites :

$Y_0(\alpha r) \rightarrow -\infty$ lorsque $r \rightarrow 0$, or la température doit rester finie donc $B=0$ et $R(r,p) = A J_0(\alpha r)$

$$\text{En } r = R : -\lambda \frac{\partial T(R,z,t)}{\partial r} = h_3 (T(R,z,t) - T_e) \Rightarrow -\lambda \frac{\partial R(R,p)}{\partial r} = h_3 R(R,p)$$

$$\frac{\partial R(r,p)}{\partial r} = -A \alpha J_1(\alpha r) \text{ donc : } \lambda A \alpha J_1(\alpha R) = h_3 A J_0(\alpha R)$$

$$\text{On pose : } H_3 = \frac{h_3 R}{\lambda} \text{ et } \omega = \alpha R,$$

Les valeurs propres ω_n sont solutions de l'équation transcendante : $\omega J_1(\omega) = H_3 J_0(\omega)$

$$\text{En } z = e : -\lambda \frac{\partial T(r,e,t)}{\partial z} = h_2 (T(r,e,t) - T_e) \Rightarrow -\lambda \frac{\partial Z(e,p)}{\partial z} = h_2 Z(e,p)$$

D'où : $-\lambda [C \gamma \text{ch}(\gamma e) + D \gamma \text{sh}(\gamma e)] = h_2 [C \text{sh}(\gamma e) + D \text{ch}(\gamma e)]$ avec : $\gamma^2 = \frac{p}{a} + \alpha^2$ et $\omega = \alpha R$

$$\text{En posant : } \beta = \gamma e \text{ et } H_2 = \frac{h_2 e}{\lambda}$$

$$\text{On obtient : } -[C \beta \text{ch}(\beta) + D \beta \text{sh}(\beta)] = H_2 [C \text{sh}(\beta) + D \text{ch}(\beta)]$$

$$\text{Or : } \theta(r,z,p) = R(r,p) Z(z,p) = A J_0(\alpha r) [C \text{sh}(\gamma z) + D \text{ch}(\gamma z)] = C A J_0(\alpha r) \left[\text{sh}(\gamma z) + \frac{D}{C} \text{ch}(\gamma z) \right]$$

$$\text{D'où : } \frac{D}{C} = - \frac{H_2 \text{sh}(\beta) + \beta \text{ch}(\beta)}{-\beta \text{sh}(\beta) - H_2 \text{ch}(\beta)}$$

On pose : $E = A C$

$$\theta(r, z, p) = E J_0(\alpha r) \left[\text{sh}(\gamma z) + \frac{H_2 \text{sh}(\beta) + \beta \text{ch}(\beta)}{-\beta \text{sh}(\beta) - H_2 \text{ch}(\beta)} \text{ch}(\gamma z) \right]$$

$$\theta(r, z, p) = E J_0(\alpha r) \frac{[(-\beta \text{sh}(\beta) - H_2 \text{ch}(\beta)) \text{ch}(\gamma z) + (H_2 \text{sh}(\beta) + \beta \text{ch}(\beta)) \text{sh}(\gamma z)]}{-\beta \text{ch}(\beta) - H_2 \text{sh}(\beta)}$$

$$\theta(r, z, p) = F J_0(\alpha r) \{ [-\beta \text{sh}(\beta) - H_2 \text{ch}(\beta)] \text{ch}(\gamma z) + [H_2 \text{sh}(\beta) + \beta \text{ch}(\beta)] \text{sh}(\gamma z) \}$$

Après développement et factorisation on obtient une solution particulière. En faisant la somme de $n = 1$ à l'infini de ces solutions, on obtient la solution générale :

$$\theta(r, z, p) = \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n J_0(\alpha_n r) [\beta_n \text{ch}(\gamma_n (e-z)) + H_2 \text{sh}(\gamma_n (e-z))]$$

$$\text{En } z = 0 : \lambda \frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} = h_1 (T(r, 0, t) - T_c) - \phi_0(t)$$

$$\text{Soit : } \lambda \frac{\partial \theta(r, 0, p)}{\partial z} = h_1 \theta(r, 0, p) - \Phi_0(p)$$

$$\lambda \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n J_0(\alpha_n r) [-\beta_n \gamma_n \text{sh}(\gamma_n (e-z)) - H_2 \gamma_n \text{ch}(\gamma_n (e-z))] - \dots$$

$$h_1 \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n J_0(\alpha_n r) [\beta_n \text{ch}(\gamma_n (e-z)) + H_2 \text{sh}(\gamma_n (e-z))] = -\Phi_0(p)$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} F_n J_0(\alpha_n r) (\lambda \beta_n \gamma_n \text{sh}(\gamma_n e) + \lambda H_2 \gamma_n \text{ch}(\gamma_n e)) + h_1 \beta_n \text{ch}(\gamma_n e) + H_2 h_1 \text{sh}(\gamma_n e) = \Phi_0(p)$$

$$\text{En posant } H_1 = \frac{e h_1}{\lambda}, \text{ on obtient : } \sum_{n=1}^{\infty} F_n J_0(\alpha_n r) \frac{\lambda}{e} [(\beta_n^2 + H_2 H_1) \text{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1) \text{ch}(\beta_n)] = \Phi_0(p)$$

$$\text{Si l'on pose : } G_n = F_n \frac{\lambda}{e} [(\beta_n^2 + H_2 H_1) \text{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1) \text{ch}(\beta_n)]$$

$$\text{On obtient : } \sum_{n=1}^{\infty} G_n J_0(\alpha_n r) = \Phi_0(p)$$

L'orthogonalité des fonctions propres permet d'écrire: $\int_0^R J_0(\alpha_n r) J_0(\alpha_m r) r dr = 0$ si $\alpha_n \neq \alpha_m$

$$\text{Donc } \int_0^R r J_0(\alpha_m r) dr \sum_{n=1}^{\infty} G_n J_0(\alpha_n r) = \int_0^R \Phi_0(p) r J_0(\alpha_m r) dr$$

$$\text{D'où : } G_n \int_0^R r J_0^2(\alpha_n r) dr = \int_0^R \Phi_0(p) r J_0(\alpha_n r) dr$$

$$G_n = \frac{\int_0^R \Phi_0(p) r J_0(\alpha_n r) dr}{\int_0^R r J_0^2(\alpha_n r) dr} = \frac{\Phi_0(p) \frac{1}{\alpha_n} R J_1(\alpha_n R)}{\frac{R^2}{2} (J_1^2(\alpha_n R) + J_0^2(\alpha_n R))} = \frac{2 \Phi_0(p)}{\omega_n \left(1 + \frac{\omega_n^2}{H_3^2} \right) J_1(\alpha_n R)}$$

On en déduit finalement :

$$\theta(r, z, p) = \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n J_0(\alpha_n r) [\beta_n \text{ch}(\gamma_n (e-z)) + H_2 \text{sh}(\gamma_n (e-z))] \quad (2.22)$$

$$\text{où : } F_n = \frac{2 \Phi_0(p) \frac{e}{\lambda}}{\omega_n \left(1 + \frac{\omega_n^2}{H_3^2} \right) J_1(\omega_n) [(\beta_n^2 + H_2 H_1) \text{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1) \text{ch}(\beta_n)]}$$

Les ω_n étant les solutions de l'équation transcendante $J_0(\omega_n) = \frac{\omega_n J_1(\omega_n)}{H_3}$ résolue numériquement. Une centaine de termes est suffisante pour calculer $\theta(r,z,p)$. On calcule ensuite $T(r,z,p)$ par transformation de Laplace inverse effectuée numériquement.

3 MESURE DE LA TEMPERATURE

3.1 Thermomètre à colonne liquide

On utilise la dilatation linéaire d'un liquide en fonction de la température.

3.2 Thermocouple

On utilise l'effet Seebeck : lorsque les deux jonctions de deux fils de nature différentes sont portées à des températures différentes, il naît une différence de potentiel qui croît avec la différence de température :

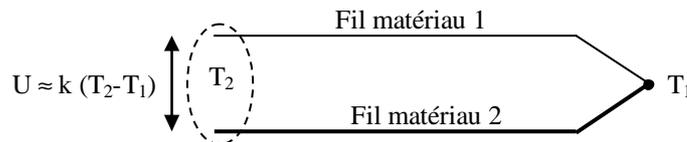


Figure 3.1 : Schéma de principe d'un thermocouple.

Des tables donnent pour chaque type de thermocouple la tension $U(T)$ délivrée lorsque la jonction froide est à 0°C et la jonction chaude à T . La fonction $U(T)$ peut être linéarisée sur des intervalles réduits de température ainsi que le montre le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Valeur de $U(T)$ pour un thermocouple de type T (Cuivre-Constantan).

Valeurs réelles		Modèle linéaire : $U(T) = 0,04189 T$				Modèle parabolique : $U(T) = 4,147 \cdot 10^{-6} T^2 + 0,003863 T$			
T	$U(T)$	$U_{(T) \text{ calc}}$	ΔU	$T_{\text{ calc}}$	ΔT	$U_{(T) \text{ calc}}$	ΔU	$T_{\text{ calc}}$	ΔT
$^{\circ}\text{C}$	mV	mV	mV	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	mV	mV	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$
0	0	0	0	0,00	0,00	0,000	0	0,00	0,00
10	0,391	0,419	0,028	9,33	0,67	0,390	0,000533	10,01	0,01
20	0,789	0,838	0,049	18,83	1,17	0,789	0,000228	19,99	0,01
30	1,196	1,257	0,061	28,54	1,46	1,196	0,000283	29,99	0,01
40	1,611	1,676	0,065	38,45	1,55	1,612	0,000632	39,98	0,02
50	2,035	2,095	0,06	48,57	1,43	2,035	0,000275	49,99	0,01
60	2,467	2,514	0,047	58,88	1,12	2,467	0,000212	60,00	0,00
70	2,908	2,933	0,025	69,40	0,60	2,907	0,000557	70,01	0,01
80	3,357	3,352	0,005	80,12	0,12	3,356	0,001032	80,02	0,02
90	3,813	3,771	0,042	91,00	1,00	3,813	0,000213	90,00	0,00
100	4,277	4,19	0,087	102,08	2,08	4,278	0,0009	99,98	0,02

Les principaux types de thermocouples et la gamme de température dans laquelle ils sont utilisables sont les suivants :

Type T :	- 185 à +300 $^{\circ}\text{C}$	Cuivre-Constantan
Type K :	0 à 1100 $^{\circ}\text{C}$	Nickel-Nickel Chrome
Type R :	0 à 1600 $^{\circ}\text{C}$	Platine-Platine Rhodium
Type G :	20 à 2360 $^{\circ}\text{C}$	Tungstène-Tungstène Rhenium

Dans les méthodes instationnaires de mesure des propriétés thermiques, la connaissance de la température absolue ne présente pas d'intérêt, on a seulement besoin de mesurer une élévation de température entre deux instants. On peut constituer une température de référence en réalisant deux blocs de matériau très effusifs (cuivre, aluminium par exemple) dont on pourra considérer la température constante et uniforme pendant la durée de la mesure compte tenu de leur forte capacité calorifique. On perce un trou de petit diamètre dans chaque bloc et on réalise la jonction entre chaque fil du thermocouple et deux fils de cuivre dans les trous pratiqués dans les deux blocs. On mesure ainsi aux bornes des deux fils de cuivre la tension aux bornes d'un thermocouple dont la soudure froide est à la température (constante) des blocs et dont la soudure chaude est à la température que

l'on veut mesurer. On en déduit la variation de température en assimilant la courbe température = f (tension) à une droite sur de petits intervalles de température. Il est impératif d'isoler les blocs électriquement (les entourer de ruban ou de vernis isolant) et préférable de les isoler thermiquement (les entourer de polystyrène par exemple).

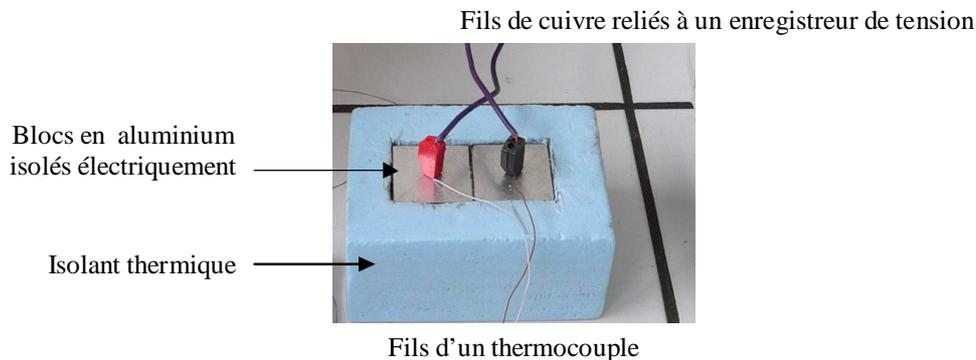


Figure 3.2 : Dispositif de réalisation d'une jonction à température constante.

La réalisation de la soudure de deux fils pour réaliser un thermocouple est délicate, on peut se contenter pour les fils de faible diamètre de les torsader. Dans ce cas la température mesurée est celle du dernier point de contact entre les deux fils.

La mesure d'une température de surface est délicate à cause du contact imparfait entre la soudure (ou la torsade) des extrémités des fils et la surface dont on veut mesurer la température. Il subsiste toujours une résistance thermique de contact entre les deux qui fausse plus ou moins la mesure. Il est préférable de réaliser un contact séparé en appliquant (par un morceau de ruban adhésif si la température le permet) les extrémités des deux fils du thermocouple sur la surface à une distance de quelques mm. Le contact électrique est alors réalisé par la surface elle-même à condition qu'elle soit conductrice (si elle ne l'est pas on la recouvre d'une fine couche laque d'argent conductrice). On mesure ainsi la moyenne des températures des deux points de contact en étant sûr qu'il n'existe pas de résistance de contact, l'existence d'un défaut de contact est facilement repérable car il conduit à une tension nulle aux bornes du thermocouple (circuit ouvert).

Lors de mesures en régime transitoire rapide, il est important que le thermocouple présente un temps de réponse le plus faible possible. Plus les fils sont fins, plus le temps de réponse est faible, on a donc toujours intérêt à utiliser les fils les plus fins possibles. On utilise souvent des fils d'un diamètre de l'ordre de 0,1mm achetés en bobine présentant un temps de réponse de l'ordre de 0,1s, exemples de fournisseurs : http://www.omega.fr/default_fr.asp , <http://www.tcdirect.fr/> .

3.3 Thermistance



Figure 3.3 : Vue d'une thermistance

C'est un composant passif en matériau semi-conducteur. Si l'auto-échauffement par effet Joule est négligeable, sa résistance varie avec la température selon la loi :

$$R(T) = R(T_0).exp [B (1/T - 1/T_0)]$$

Les températures sont exprimées en degrés Kelvin, B et T₀ sont des constantes caractéristiques du composant. Comme la résistance diminue avec la température on nomme parfois les thermistances résistances C^{TN} (pour coefficient de température négatif).

La caractéristique courant-tension présente pour les courants faibles une partie linéaire puis un plateau et enfin pour les courants plus intenses une zone à pente négative qui correspond à l'auto-échauffement du composant.

La gamme d'utilisation est -50°C à 200°C.

3.4 Résistance de platine

On utilise une résistance de platine sous forme de fil dont la résistance augmente quasi-linéairement avec la température, on a par exemple pour une résistance Pt100 :

$$R = 100 + 0,3864 T$$

Avec : R Résistance (Ω)
T Température ($^{\circ}\text{C}$)

Tableau 3.2 : Valeur de la résistance d'un fil de platine en fonction de la température

T	R _{Pt}	R _{Ptcalculé}	ΔR	T _{calculé}	ΔT
$^{\circ}\text{C}$	Ω	Ω	Ω	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$
0	100	100,00	0	0,00	0,00
5	101,95	101,93	0,018	5,05	0,05
10	103,9	103,86	0,036	10,09	0,09
15	105,85	105,80	0,054	15,14	0,14
20	107,79	107,73	0,062	20,16	0,16
25	109,73	109,66	0,07	25,18	0,18
30	111,67	111,59	0,078	30,20	0,20
35	113,61	113,52	0,086	35,22	0,22
40	115,54	115,46	0,084	40,22	0,22
45	117,47	117,39	0,082	45,21	0,21
50	119,4	119,32	0,08	50,21	0,21
55	121,32	121,25	0,068	55,18	0,18
60	123,24	123,18	0,056	60,14	0,14
65	125,16	125,12	0,044	65,11	0,11
70	127,08	127,05	0,032	70,08	0,08
75	128,99	128,98	0,01	75,03	0,03
80	130,9	130,91	-0,012	79,97	-0,03
85	132,8	132,84	-0,044	84,89	-0,11
90	134,71	134,78	-0,066	89,83	-0,17
95	136,61	136,71	-0,098	94,75	-0,25
100	138,51	138,64	-0,13	99,66	-0,34

La gamme de température dans laquelle ils sont utilisables est de -200°C à $+850^{\circ}\text{C}$.

3.5 Détecteur IR

Ce sont des détecteurs optiques (photovoltaïques) de quelques mm^2 qui génèrent un courant quand ils sont exposés à un rayonnement infrarouge. Placés proches de la surface dont on veut mesurer la température, ils délivrent un signal proportionnel à la température de surface si les écarts de température sont faibles (linéarisation possible du flux radiatif proportionnel à T^4). Leur intérêt est de permettre une mesure sans contact donc sans perturbation de la surface dont on veut mesurer la température. Ils présentent également un temps de réponse pratiquement nul ce qui permet d'étudier des phénomènes transitoires de quelques ms. Ils nécessitent d'être maintenus à température constante la plus basse possible par utilisation d'azote liquide ou d'élément Peltier, leur coût est relativement élevé. Exemple :

Les détecteurs J10D sont des photodiodes à l'Antimoniure d'Indium (InSb) de haute qualité fournissant une excellente performance dans la région de longueur d'onde de 1 à 5,5 μm . La technologie mono cristal à jonction p-n produit des détecteurs de grand vitesse et de faible bruit avec une excellente uniformité, linéarité et stabilité.

Applications

*Imagerie Thermique, Guidage par Infrarouge
Radiomètres, Spectrométrie*



3.6 Caméra IR

Ces caméras permettent de mesurer non plus une température ponctuelle mais un champ de grandeurs proportionnelles à la température. Un calibrage à partir d'un corps à température contrôlée et d'émissivité connue est nécessaire pour remonter aux températures. Le nombre d'informations à traiter devient très important et nécessite d'utiliser des techniques de traitement du signal performantes. Les applications sont multiples : détection de défauts dans des plaques, mesure de champ de diffusivité thermique... Exemple :

Thermography Camera PV320T Electrophysics' PV320T is a calibrated thermal camera incorporating a high resolution (320x240) uncooled focal plane array.

Features:

-10° to 500°C calibration

2% accuracy

USB2.0 high speed output

0.08°C sensitivity

Broadband 3-14μm



3.7 Choix d'une méthode de mesure

Dans les applications de métrologie thermique instationnaire, le thermocouple présente l'avantage d'une taille plus faible par rapport à la thermistance et la possibilité de mesurer une température ponctuelle par rapport à la résistance de platine qui est plutôt utilisée pour mesurer une température moyenne sur une ligne ou sur une surface. La grandeur à mesurer est une tension mesurable facilement à condition toutefois de disposer d'un bon amplificateur compte tenu des faibles valeurs (de l'ordre de 0,04mV par °C) à mesurer.

4 METROLOGIE THERMIQUE : OUTILS ET METHODES

4.1 Introduction

Nous allons dans ce chapitre présenter les outils et les méthodes utilisées par la suite dans les différents dispositifs de caractérisation thermique présentés. Nous illustrerons d'abord sur un exemple l'intérêt de l'utilisation d'un modèle complet établi dans le cas traité par application de la méthode des quadripôles thermiques. Nous présenterons ensuite les avantages de la réalisation préalable d'une étude de sensibilité des grandeurs mesurées aux paramètres inconnus avant de décrire brièvement les méthodes utilisées pour l'estimation des paramètres et l'évaluation de la précision des estimations. Nous concluons en présentant la méthodologie globale retenue pour l'étude des différentes méthodes présentées par la suite.

4.2 Intérêt d'un modèle quadripolaire complet

Un certain nombre de méthodes de caractérisation thermique sont devenues populaires du fait de la simplicité du mode d'exploitation des résultats, ce qui représentait un avantage décisif lorsque les moyens de calcul étaient plus limités qu'aujourd'hui. Dans cette catégorie nous pouvons ranger la méthode du plan chaud qui permet d'estimer l'effusivité thermique par simple estimation de la pente d'une courbe expérimentale de température. La méthode du fil chaud permettant d'estimer la conductivité thermique par une méthode analogue en fait également partie. Ces méthodes simples reposent toutefois toutes sur des hypothèses qu'il n'est pas toujours aisé de vérifier telles que : inertie des sondes négligeables, milieu semi-infini. Le développement des moyens de calcul permet maintenant d'utiliser des modèles plus complets faisant appel à moins d'hypothèses simplificatrices ou permettant de les vérifier plus simplement.

A titre d'exemple, nous allons illustrer l'intérêt de l'utilisation d'un modèle quadripolaire complet pour l'exploitation des mesures de caractérisation thermique par son application à une méthode classique utilisée par de nombreux auteurs (Andersson, 1976), (Nagasaka et Nagashima, 1981), (Backstrom, 1982), (Zhang et al, 1993) : la détermination de la conductivité thermique par la méthode du fil chaud. Dans cette méthode, on mesure l'évolution de la température d'un fil dans lequel est dissipé un flux de chaleur constant, ce fil étant placé dans le matériau à caractériser.

Le voisinage du fil chauffant est schématisé sur la figure 4.1 :

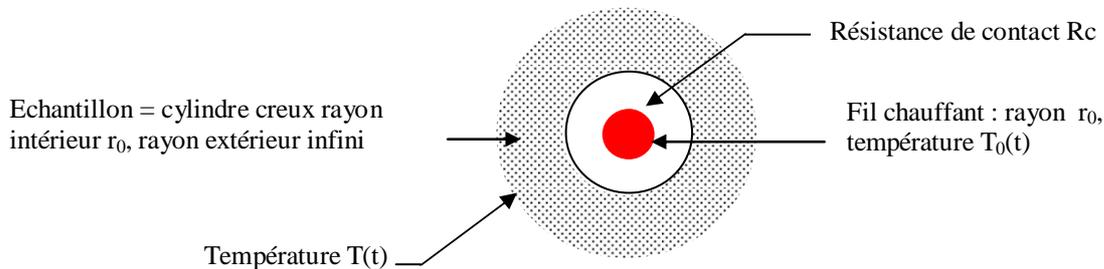


Figure 4.1 : Schématisation du fil chaud

La modélisation du système à l'aide du formalisme des quadripôles permet d'écrire (Maillet et al, 2000) :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Phi_0 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi\lambda L q r_0} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} - \frac{1}{\rho c \pi r_0^2 L p} \\ \rho c \pi r_0^2 L p & \frac{q r_0}{2} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ 2\pi\lambda L q r_0 \frac{K_1(q r_0)}{K_0(q r_0)} \theta \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

avec $q = \sqrt{\frac{P}{a}}$

Où :

θ_0	Transformée de Laplace de la différence $T_0(t) - T_0(t=0)$
θ	Transformée de Laplace de la différence $T(t) - T_0(t=0)$
R_c	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / échantillon
c	Chaleur spécifique du fil chaud
ρ	Masse volumique du fil chaud
λ	Conductivité thermique de l'échantillon

a	Diffusivité thermique de l'échantillon
p	Variable de Laplace
r ₀	Rayon du fil chauffant
L	Longueur du fil chauffant
φ ₀	Puissance dissipée dans la résistance chauffante
I ₀ , I ₁ , K ₀ , K ₁	Fonctions de Bessel

$$D'où : \quad \theta_0 = \frac{\varphi_0}{p} \frac{A_0 + (A_0 R_c + B_0)/Z}{C_0 + (C_0 R_c + D_0)/Z} \quad (4.2)$$

$$\text{avec } A_0 = 1 ; B_0 = \frac{1}{2\pi\lambda L q r_0} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} - \frac{1}{\rho c \pi r_0^2 L p} ; C_0 = \rho c \pi r_0^2 L p ; D_0 = \frac{q r_0}{2} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)}$$

$$\frac{1}{Z} = 2\pi\lambda L q r_0 \frac{K_1(q r_0)}{K_0(q r_0)}$$

En négligeant l'effet de l'inertie de la sonde, la température du fil chaud s'écrit dans l'espace de Laplace :

$$\theta_0(p) = \frac{\varphi}{p} \left[R_c + \frac{K_0(q r_0)}{2\pi\lambda L q r_0 K_1(q r_0)} \right] \quad (4.3)$$

Dans l'exploitation classique de la méthode du fil chaud, on considère l'hypothèse un fil fin (r₀ petit) et l'on se place aux temps « longs » (p → 0), ce qui permet d'utiliser les développements limités des fonctions de Bessel au voisinage de 0 :

$$K_0(x) \approx -\ln(x) ; \quad K_1(x) \approx 1/x ; \quad I_0(x) \approx 1 ; \quad I_1(x) \approx x/2$$

$$\text{Qui conduisent à } A_0 = 1 ; B_0 = 0 ; C_0 = \rho c \pi r_0^2 L p ; D_0 = 1 ; \frac{1}{Z} = -\frac{2\pi\lambda L}{\ln(q r_0)}$$

$$\text{On en déduit : } \theta_0 = \frac{\varphi_0}{p} \frac{Z + R_c}{m c p (R_c + Z) + 1} \quad (4.4)$$

Où m est la masse du fil chaud.

$$\text{Soit : } \theta_0 \approx \frac{\varphi_0}{p} (Z + R_c) \approx \frac{\varphi_0}{p} \left(-\frac{\ln\left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{2\pi\lambda L} + R_c \right) \approx \frac{\varphi_0}{p} \left(-\frac{\ln(p)}{4\pi\lambda L} - \frac{\ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{4\pi\lambda L} + R_c \right) \quad (4.5)$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse permet de calculer la température T₀(t) aux temps longs :

$$T_0(t) - T_0(0) \approx \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L} \ln(t) + R_c \varphi_0 - \frac{\gamma \varphi_0}{4\pi\lambda L} - \frac{\varphi_0 \ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{2\pi\lambda L} \quad (4.6)$$

Où γ = 0,57721 est la constante d'Euler.

$$\text{Soit finalement : } T(t) - T_0(t) \approx \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L} \ln(t) + \varphi_0 \left[R_c - \frac{\ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{\gamma}{4\pi\lambda L} \right] \quad (4.7)$$

Moyennant les hypothèses citées plus haut, le tracé de T₀(t) - T₀(t=0) en fonction de ln(t) est donc une droite de pente $\frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L}$ dont la détermination permet d'estimer la conductivité thermique λ.

Le graphe sur la figure 4.2 représente pour différents cas de figure l'écart en % entre la pente de la courbe T_s(0,0,t) = f[ln(t)] calculée entre t₀ et t₀ + 100 s et la valeur $\frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L}$ obtenue pour un temps infini. Cette pente a

été déterminée en calculant la température T_s(0,0,t) par transformation de Laplace inverse de la formule (4.3) par la méthode de Stehfest avec 10 termes (Stehfest, 1970) ou de De Hoog (De Hoog, 1982) puis par dérivation par rapport à ln(t). Les valeurs suivantes ont été utilisées dans les calculs :

$$\varphi_0 = 0,5 \text{ W.m}^{-1}; \lambda = 0,12 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}; E = 300 \text{ J.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}.\text{s}^{-1/2}; R_c = \frac{1}{2\pi r_0 h L}; \rho c = 2.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{°C}^{-1}$$

Les différents cas de figure traités sont les suivants :

- a) $r_0 = 0,25 \text{ mm}$, fil chauffant de masse nulle, résistance de contact nulle,
- b) $r_0 = 0,25 \text{ mm}$, $\rho c = 2.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{°C}^{-1}$ et $h = 10000 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$
- c) $r_0 = 0,25 \text{ mm}$, $\rho c = 2.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{°C}^{-1}$ et $h = 5000 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$
- d) $r_0 = 0,5 \text{ mm}$, $\rho c = 2.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{°C}^{-1}$ et $h = 10000 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$

Les valeurs du rayon retenues sont du même ordre de grandeur que le rayon du fil chaud utilisé par certains auteurs, nous avons par exemple relevé l'utilisation d'une sonde de 0,7 mm de diamètre pour mesurer la conductivité de fruits et légumes (Liang et al, 1999).

L'analyse de la figure 4.2 conduit aux remarques suivantes relatives au cas de figure traité :

- l'erreur due à l'approximation « r_0 petit », représentée par la courbe a), n'est pas négligeable : elle est de l'ordre de 1 à 2 % pour les intervalles d'exploitation usuels. Cette erreur qui augmente rapidement avec le diamètre du fil (ainsi que le montre la différence entre les courbes b) et d) entre lesquelles seul le rayon a varié) est due à l'approximation :

$$2\pi\lambda L q r_0 \frac{K_1(qr_0)}{K_0(qr_0)} \approx -\frac{2\pi\lambda L}{\ln(qr_0)} \quad (4.8)$$

- l'erreur due à l'approximation « sonde de masse nulle » conduit à des erreurs de plusieurs %, cette erreur augmente avec la résistance de contact pour une même masse de sonde ainsi que le montre la différence entre les courbes b) et c) .

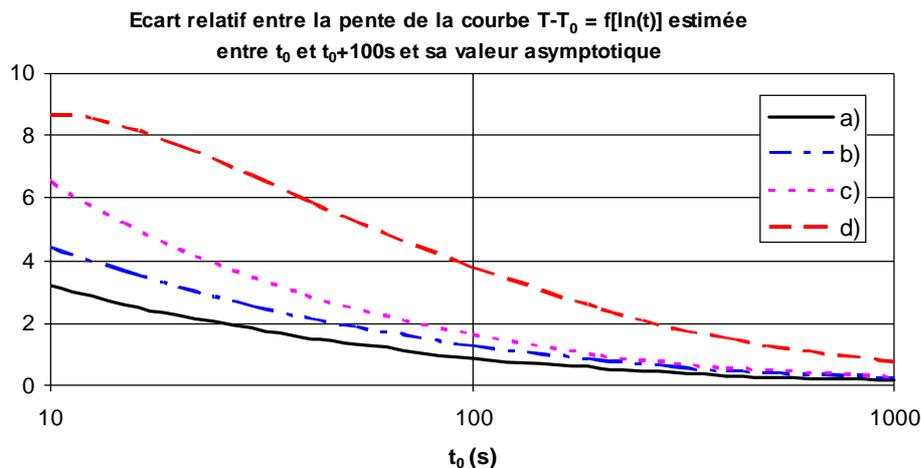


Figure 4.2 : Ecart relatif (en %) entre la pente de la courbe $T-T_0 = f[\ln(t)]$ estimée entre t_0 et t_0+100 s et la valeur $\frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L}$

Ces remarques n'ont pas pour objet de remettre en cause une méthode de référence dans son cadre d'utilisation le plus courant qui est la mesure des propriétés thermiques des liquides ou des gaz avec des fils chauffants de très petits diamètre, de l'ordre 0,025 mm (Rharbaoui, 1994), pour lesquels l'utilisation de la formule simplifiée (4.6) n'induit aucune erreur. Elles montrent cependant que l'utilisation de modèles simplifiés obtenus par des développements limités de l'expression de la température dans l'espace de Laplace peut conduire à des erreurs non négligeables dans certains cas particuliers où des sondes de diamètre plus important sont utilisées. Il est donc préférable d'utiliser un modèle complet tenant compte entre autres des résistances de contact ainsi que de la taille et de l'inertie de la sonde. L'application de la méthode quadripolaire permet d'établir ces modèles complets dans de nombreux cas de figure, la méthode de Stehfest associée à une méthode d'estimation de paramètres de type Newton ou Levenberg-Marquart permet ensuite de déterminer les propriétés thermiques recherchées avec une meilleure précision qu'en utilisant un modèle simplifié.

On notera enfin qu'un modèle quadripolaire « complet » permet d'exploiter la totalité des points des thermogrammes et évite le choix souvent délicat de la bonne fenêtre d'exploitation des mesures de températures

sur laquelle les différences entre le modèle idéal et les résultats expérimentaux sont faibles. Cet intervalle est parfois déterminé de manière assez empirique : on réalise une estimation des paramètres sur un intervalle de temps d'amplitude constante dont on fait varier la borne inférieure de manière croissante à partir de zéro. On trace ensuite les courbes donnant les valeurs des paramètres estimés en fonctions de la valeur de la borne inférieure de l'intervalle et on choisit comme intervalle de temps optimal un intervalle présentant une valeur constante des paramètres. L'identification de ce palier ne semble pas une garantie suffisante pour affirmer que l'estimation n'est pas biaisée par la non-prise en compte de l'existence de résistances de contact et de l'inertie de la sonde et de plus l'existence d'un palier n'est pas toujours très marquée (Kubicar et Bohac, 2000), (Kubicar et al, 2002).

4.3 Etude de sensibilité

Le principe de l'analyse des sensibilités réduites a été décrit par plusieurs auteurs (Beck et Arnold, 1977), (Maillet, 1991), (Kurz et Nowak, 1995). La sensibilité réduite de la température par rapport à un paramètre k_i se calcule par $k_i \frac{\partial T}{\partial k_i}$. Cette grandeur représente la variation de T (en °C) induite par une variation relative de k_i de 100 %. Les sensibilités réduites présentent ainsi l'avantage de permettre la comparaison directe de l'influence relative des différents paramètres sur la température T.

Une condition nécessaire pour que l'estimation séparée des paramètres soit possible est que les sensibilités de T(t) à chacun des paramètres soient décorrélées. Cela signifie qu'il ne doit pas exister de relation de linéarité du type : $\sum_i C_i \frac{\partial T}{\partial k_i}(t)$ entre les fonctions $\frac{\partial T}{\partial k_i}(t)$ (Beck et Arnold, 1977).

A titre d'exemple, nous avons calculé ces diverses sensibilités pour la température T d'un plan chaud pour les conditions nominales suivantes :

$$E = 500 \text{ J.m}^{-2}.\text{C}^{-1}.\text{s}^{-1/2}, R_c = 2.10^{-3} \text{ m}^2.\text{C}.\text{W}^{-1}, mc = 0,75 \text{ J}.\text{C}^{-1}, \frac{\Phi_0}{S} = 500 \text{ W.m}^{-2}.$$

La transformée de Laplace de cette température s'écrit :

$$\theta(p) = \frac{\Phi_0}{2p} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{\frac{mc}{2} p + \left[R_c \frac{mc}{2} p + 1 \right] E S \sqrt{p}} \quad (4.9)$$

La température T(t) s'en déduit par transformation de Laplace inverse en appliquant par exemple la méthode de Stehfest. Les différentes dérivées partielles $\frac{\partial T}{\partial k_j}(t)$ peuvent ensuite se calculer numériquement par :

$$\frac{\partial T}{\partial k_j}(t) = \frac{T(k_0, k_1, \dots, k_j + \epsilon, \dots, k_p, t) - T(k_0, k_1, \dots, k_j, \dots, k_p, t)}{\epsilon} \quad (4.10)$$

On a représenté sur la figure 4.3 :

- La courbe simulée T(t) avec ces conditions nominales sur 60 s.
- Les courbes $E \frac{\partial T}{\partial E}(t)$, $R_c \frac{\partial T}{\partial R_c}(t)$ et $mc \frac{\partial T}{\partial mc}(t)$ entre 0 et 60 s.

Et sur la figure 4.4 les courbes $\frac{E \frac{\partial T}{\partial E}}{R_c \frac{\partial T}{\partial R_c}}(t)$, $\frac{E \frac{\partial T}{\partial E}}{mc \frac{\partial T}{\partial mc}}(t)$ et $\frac{R_c \frac{\partial T}{\partial R_c}}{mc \frac{\partial T}{\partial mc}}(t)$ entre 0 et 60 s.

On constate que la sensibilité à E est forte et non corrélée aux sensibilités à R_c et à mc car les deux rapports $\frac{E \frac{\partial T}{\partial E}}{R_c \frac{\partial T}{\partial R_c}}$ et $\frac{E \frac{\partial T}{\partial E}}{mc \frac{\partial T}{\partial mc}}$ ne sont pas constants. Il est donc possible d'estimer E à partir de la courbe expérimentale $\hat{T}(t)$. On constate également que les sensibilités à R_c et à mc sont fortement décorrélées entre 0 et

10 s, il sera donc possible de les estimer séparément sur cet intervalle de temps. Par contre, le rapport $\frac{R_c}{mc} \frac{\partial T}{\partial R_c}$ varie faiblement après 10 s, il n'est donc plus possible d'estimer R_c et mc avec la portion de courbe $\hat{T}(t)$ correspondant à $t > 10s$.

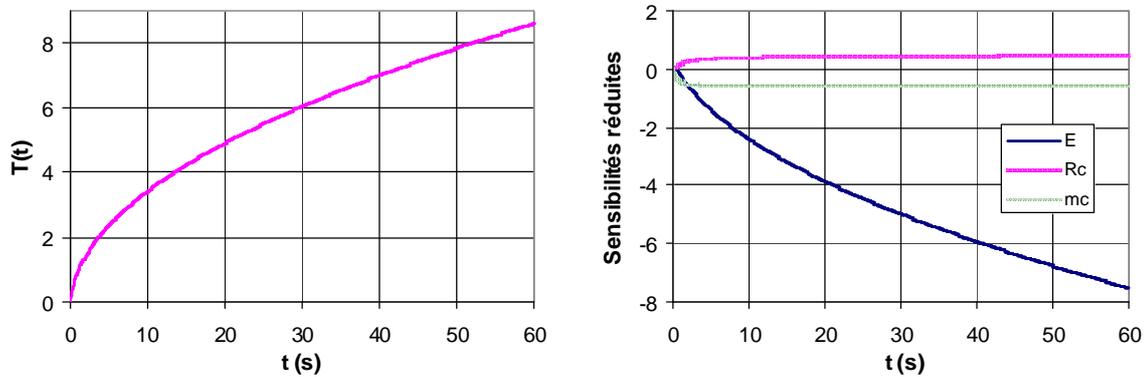


Figure 4.3 : Courbe $T(t)$ et courbes de sensibilités réduites à T , R_c et mc pour la méthode du plan chaud.

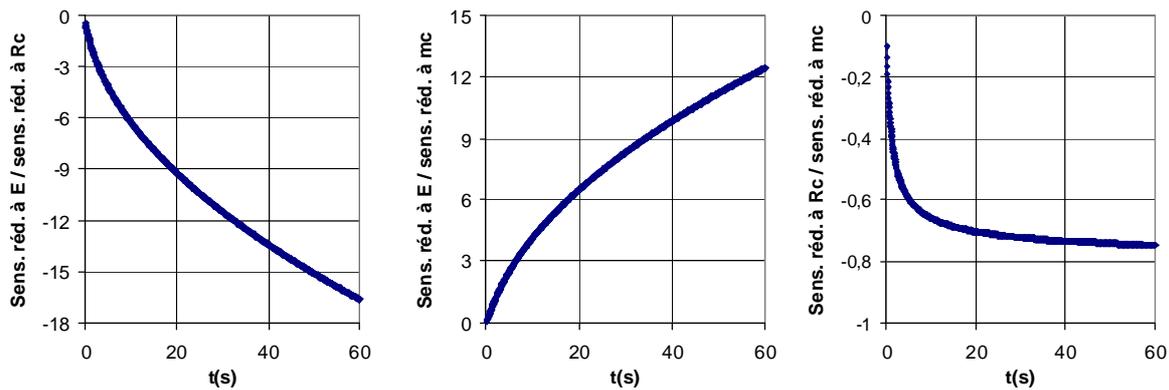


Figure 4.4 : Rapport des sensibilités réduites aux trois paramètres E , R_c et mc pour la méthode du plan chaud

Nous retiendrons que l'étude de sensibilité réalisée à partir d'un modèle quadripolaire complet permet d'étudier entre autre la sensibilité de la température T aux paramètres R_c et mc . Il est alors possible de déterminer en fonction des valeurs de R_c , de mc et des propriétés thermiques du matériau à partir de quel instant t_0 les sensibilités à ces deux paramètres deviennent constantes. On peut ensuite éventuellement choisir d'utiliser un modèle idéal applicable pour $t > t_0$ pour estimer les autres paramètres en étant sûr que les hypothèses ayant conduit à son établissement sont satisfaites.

Nous avons pour notre part préféré utiliser un modèle complet permettant l'exploitation de tous les points de mesure pour éviter la perte d'information correspondant à la non-exploitation des premiers points. Ceci nous permet d'estimer les paramètres résistance de contact R_c et capacitance thermique de la sonde mc et de vérifier la cohérence des valeurs obtenues pour ces paramètres. Une étude de sensibilité préalable utilisant un modèle complet sera toujours réalisée pour déterminer les intervalles de temps sur lesquels les paramètres sont suffisamment décorrélés pour permettre une estimation satisfaisante.

4.4 Méthode d'estimation des paramètres

Le problème posé est d'estimer la valeurs de p paramètres inconnus k_0, k_1, \dots, k_p (qui peuvent être dans les cas traités ici : λ, E, a, R_c, mc) connaissant :

- Les résultats de N mesures $\hat{T}(t_i)$ réalisées à des instants t_i , d'une (voire plusieurs) température T dépendant de ces p paramètres,

- Le modèle (quadrupolaire) complet permettant de relier la valeur de T à celles des paramètres k_0, k_1, \dots, k_n sous la forme $T = f(k_0, k_1, \dots, k_n, t)$.

Notons que dans les applications traitées ici, l'écart-type sur la mesure de température ne varie pas dans le temps et les erreurs de mesures sont décorréllées : l'erreur sur la mesure $\hat{T}(t_i)$ ne dépend pas des autres mesures $\hat{T}(t_j)$.

Dans ce qui suit on notera [B] la matrice des paramètres inconnus : $[B] = \begin{bmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix}$ et [X] la matrice de sensibilité

$$\text{définie par } [X] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial k_0}\right)_{t_0} & \left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)_{t_0} & \dots & \left(\frac{\partial f}{\partial k_p}\right)_{t_0} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial k_0}\right)_{t_2} & \left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)_{t_1} & \dots & \left(\frac{\partial f}{\partial k_p}\right)_{t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f}{\partial k_0}\right)_{t_N} & \left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)_{t_N} & \dots & \left(\frac{\partial f}{\partial k_p}\right)_{t_N} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Le problème posé est double :

- Trouver les valeurs de k_0, k_1, \dots, k_p telles que la courbe $T = f(k_0, k_1, \dots, k_p, t)$ représente au mieux les N couples de points expérimentaux $[\hat{T}_i, t_i]$,
- Evaluer la précision avec laquelle les valeurs de k_0, k_1, \dots, k_p sont estimées.

Le premier problème est résolu en minimisant le critère le plus souvent retenu qui est la somme Σ des écarts quadratiques, soit la somme des carrés des distances des points expérimentaux à la courbe théorique :

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N d_i^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i - T_{\text{mod}_i})^2 .$$

La relation liant T aux différents paramètres est souvent complexe et très rarement linéaire, la méthode d'estimation des moindres carrés linéaires ne peut donc pas s'appliquer. Nous avons le plus souvent utilisé la méthode de Newton qui est une méthode itérative d'ordre 2 (Trigeassou, 1988).

Dans la méthode de Newton, la matrice [B] des paramètres inconnus k_j se calcule de manière itérative par :

$$[B_{i+1}] = [B_i] - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_0^2} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_1 \partial k_0} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_p \partial k_0} \\ \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_0 \partial k_1} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_1^2} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_p \partial k_1} \\ \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_0 \partial k_p} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_1 \partial k_p} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_p^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Sigma}{\partial k_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial k_p} \end{bmatrix} = [B_i] - [\Sigma'']^{-1} [\Sigma'] \quad (4.12)$$

La matrice $[\Sigma'']$ est appelée le hessien du critère de minimisation, avec :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial k_j}(t_i) = -2 \sum_{i=1}^N [\hat{T}(t_i) - T(t_i)] \frac{\partial T}{\partial k_j}(t_i) \quad (4.13)$$

$$\text{Et : } \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_j \partial k_\ell}(t_i) = 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial k_j}(t_i) \frac{\partial T}{\partial k_\ell}(t_i) - 2 \sum_{i=1}^N [\hat{T}(t_i) - T(t_i)] \frac{\partial^2 T}{\partial k_j \partial k_\ell}(t_i) \quad (4.14)$$

En pratique on néglige le second terme devant le premier (approximation de Gauss-Newton) et on calcule les termes du pseudo-hessien par :

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial k_j \partial k_\ell}(t_i) = 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial k_j}(t_i) \frac{\partial T}{\partial k_\ell}(t_i) \quad (4.15)$$

Où $T(t_i)$, $\frac{\partial T}{\partial k_j}(t_i)$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial k_j \partial k_\ell}(t_i)$ sont calculés avec les valeurs $k_{0j}, k_{1j}, \dots, k_{pj}$.

Cette méthode n'est stable que si la matrice $[\Sigma]$ est définie positive. Elle peut diverger si l'on part trop loin de la solution d'où le soin particulier à apporter au choix des valeurs de départ qui pourra être guidé par des considérations physiques. La méthode de Newton présente l'avantage d'être préprogrammée dans le « solveur » intégré à Excel.

Remarque :

Les dérivées premières et secondes de la température qui est le plus souvent calculée par transformation de Laplace inverse sont rarement exprimables sous forme explicite et sont donc souvent calculées numériquement par :

$$\frac{\partial T}{\partial k_j}(t) = \frac{T(k_0, k_1, \dots, k_j + \varepsilon, \dots, k_p, t) - T(k_0, k_1, \dots, k_j, \dots, k_p, t)}{\varepsilon}$$

4.5 Méthode d'évaluation de la précision de l'estimation

Dans le cas où les paramètres sont liés par une relation linéaire, c'est-à-dire où les fonctions $\left(\frac{\partial f}{\partial k_i}\right)$ sont indépendantes des paramètres k_0, k_1, \dots, k_p , on peut évaluer l'écart-type de l'erreur sur l'estimation des paramètres k_0, k_1, \dots, k_p due au bruit de mesure sur $\hat{T}(t)$ (erreur de mesure aléatoire de moyenne nulle) à l'aide de la formule suivante (Beck et Arnold, 1977):

$$[\text{cov}(e_B)] = \sigma T^2 [X^t X]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Où σT^2 est le carré de l'écart-type de l'erreur de mesure sur T.

Les variables $a_{00}, a_{11}, \dots, a_{nn}$ représentent respectivement les carrés des écarts-types de l'erreur d'estimation de k_0, k_1, \dots, k_n : $\sigma k_i = \sqrt{a_{ii}}$.

Dans les cas de figure traités où la relation liant la température aux paramètres inconnus n'est pas linéaire, on peut évaluer la précision avec laquelle les paramètres inconnus ont été estimés en supposant que la fonction $T(k_0, k_1, \dots, k_p, t)$ est linéaire par rapport à k_0, k_1, \dots, k_p sur des intervalles de très faibles amplitudes autour des valeurs optimales estimées. Un exemple de programmation de la méthode de Newton sous Matlab pour estimer la valeur des paramètres effusivité thermique E, résistance de contact Rc et capacitance thermique de la sonde mc ainsi l'écart-type sur les valeurs estimées à partir d'un thermogramme « Plan chaud » est présentée dans le cours Estimation des paramètres : Méthodes de base (Jannot, 2005).

Dans le cas particulier où l'inversion de la matrice $[X^t X]$ pose problème, on peut adopter la méthode suivante :

A partir d'une série de N couples expérimentaux $[\hat{T}_i, \hat{T}_i]$, on simule numériquement q autres séries de N couples de l'une des manières suivantes : $\hat{T}_{i \text{ simulé}} = \hat{T}_i + r_i \sigma Y_i$

Où :

- r_i est un nombre aléatoire suivant une loi normale, de moyenne nulle et d'écart type égal à 1. Ce nombre peut être généré en langage Matlab avec l'instruction : $r_i = \text{randn}(1)$.
- σY_i est l'écart-type des mesures de T_i . Si on connaît plutôt l'incertitude dT , on prendra $\sigma T = \frac{dT}{3}$ car le nombre r_i suit une loi normale.

On simule ainsi des mesures avec un bruit suivant une loi normale centrée représentatif de la plupart des mesures.

Après avoir appliqué cette méthode, on estime les paramètres k_0, k_1, \dots, k_p pour chacune des q séries simulées. On dispose ainsi d'une matrice du type :

$$B = \begin{bmatrix} k_{01} & \dots & k_{0q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1} & \dots & k_{pq} \end{bmatrix}$$

On peut ensuite former la matrice $[eB] = [k_i - k_{ij}]$ où k_i est le résultat de l'estimation du $i^{\text{ème}}$ paramètre à partir de la série de points expérimentaux et k_{ij} est le résultat de l'estimation de ce même paramètre à partir de la $j^{\text{ème}}$ série de points simulés.

On calcule ensuite la matrice $[cov(eB)]$ dont les termes diagonaux a_{ii} représentent les carrés de l'écart-type de l'erreur d'estimation des k_i .

Un exemple de programmation sous Matlab de cette méthode d'évaluation de l'écart-type de la valeur estimée de la diffusivité thermique a à partir d'une méthode « Flash long » est présentée dans le cours « Estimation des paramètres : Méthodes de base », (Jannot, 2005).

Remarque :

Nous n'avons évalué que les erreurs d'estimation des paramètres dues au bruit de mesure sur la température $\hat{T}(t)$ dont l'intérêt est de permettre un choix optimal des conditions d'expérimentation. A ces erreurs doivent s'ajouter les erreurs dues aux erreurs de mesures des paramètres du modèle considérés comme des données (flux, surface,...) et les erreurs dues au modèle lui-même qui ne donne parfois qu'une représentation approchée de la réalité en négligeant certains phénomènes physiques.

4.6 Conclusion

Le schéma de principe de la démarche utilisée pour exploiter les différentes méthodes de caractérisation que nous allons présenter est représenté sur la figure 2.7. Nous allons maintenant dans les chapitres suivants décrire selon ce schéma les méthodes de caractérisation thermique les plus couramment utilisées.

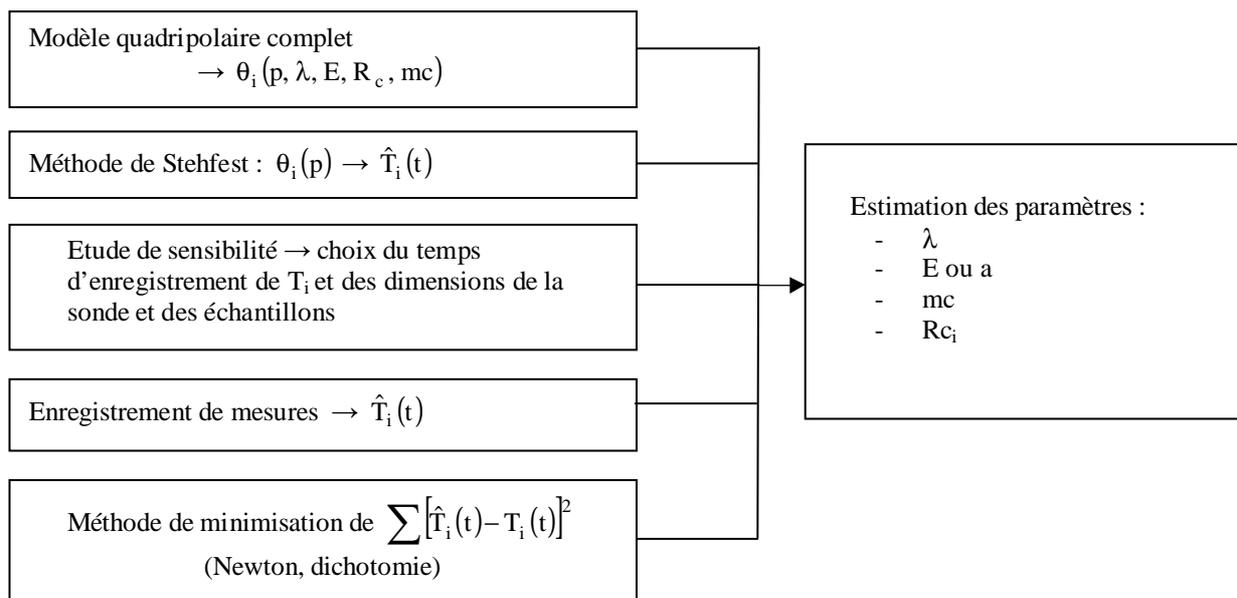


Figure 4.6 : Schéma de principe de la démarche utilisée pour l'exploitation des méthodes de caractérisation

5 METHODE DE LA PLAQUE CHAUDE GARDEE

C'est une méthode de mesure stationnaire de la conductivité thermique des matériaux isolants. Son schéma de principe est représenté sur la figure 5.1.

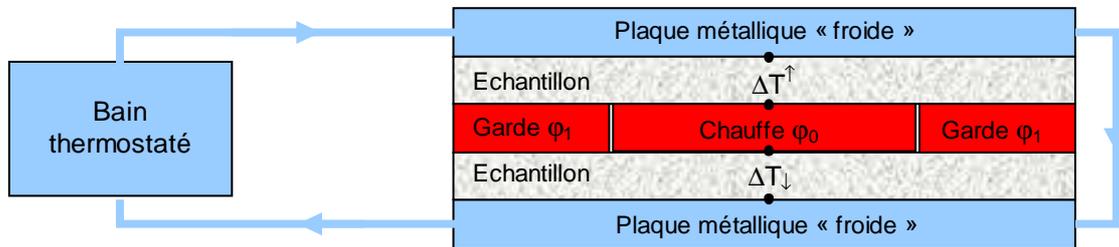


Figure 5.1 : Schéma de principe de la méthode de la plaque chaude gardée.

Les plaques extérieures en matériau très conducteur (cuivre, aluminium) sont maintenues à température constante par circulation d'un fluide issu d'un bain thermostaté. Une plaque chauffante délivre une puissance de chauffe φ_0 uniforme et constante qui est transmise aux plaques extérieures à travers les échantillons dont on veut mesurer la conductivité thermique. On s'assure du transfert 1D dans la zone centrale de mesure en entourant la zone chauffée par un anneau de garde auquel on fournit un flux φ_1 tel que la température de l'anneau soit égale à la température de la plaque chauffante. On s'assure ainsi également que tout le flux φ_0 passe à travers l'échantillon. Le flux φ_1 est supérieur au flux φ_0 pour compenser les pertes latérales convectives. L'anneau de garde et la plaque chauffante sont séparés par une mince couche d'air.

Des thermocouples sont placés sur les deux faces des échantillons pour en mesurer les écarts de température ΔT_{\downarrow} et ΔT_{\uparrow} .

La conductivité thermique s'en déduit par :

$$\lambda = \frac{e \varphi_0}{S (\Delta T_{\downarrow} + \Delta T_{\uparrow})} \quad (5.1)$$

Où S est la surface de la plaque chauffante.

Cette méthode n'est applicable qu'aux isolants pour lesquels on peut négliger les résistances de contacts par rapport à la résistance du matériau. Ils permettent par ailleurs d'obtenir des écarts de température entre les deux faces relativement importants donc mesurables avec une bonne précision. On peut utiliser de la graisse conductrice pour diminuer les résistances de contact entre les échantillons et les plaques. Cette méthode est difficilement applicable à haute température et le résultat peut être biaisé par les pertes latérales si la surface de l'échantillon est insuffisante par rapport à l'épaisseur. Elle a fait l'objet d'une normalisation ISO 8302 :1991, NF EN 1946-2.

6 METHODE DU FIL CHAUD

6.1 Principe de la méthode



Figure 6.1 : Vue d'une sonde de type fil chaud

On place un fil chauffant entre les surfaces de deux échantillons du matériau à caractériser. On applique un échelon de flux de chaleur constant ($\varphi = 0$ si $t < t_0$ et $\varphi = \varphi_0$ si $t > t_0$) au fil chauffant et on relève l'évolution de la température $T_s(t)$ de ce fil. Pendant le temps où la perturbation n'a pas atteint les autres faces des échantillons, c'est-à-dire où l'hypothèse du milieu semi-infini est valide, on peut considérer que le transfert au centre de l'échantillon autour du fil est radial. La modélisation de ce transfert de chaleur permet de calculer l'évolution de la température au centre de l'échantillon. On applique une méthode d'estimation de paramètres pour calculer les valeurs de :

- La conductivité thermique λ ,
- La capacité thermique $(mc)_s$ de l'ensemble sonde + résistance chauffante,
- La résistance de contact R_c à l'interface sonde/échantillon,

qui minimisent l'écart entre les courbes $T_s(t)$ théoriques et expérimentales.

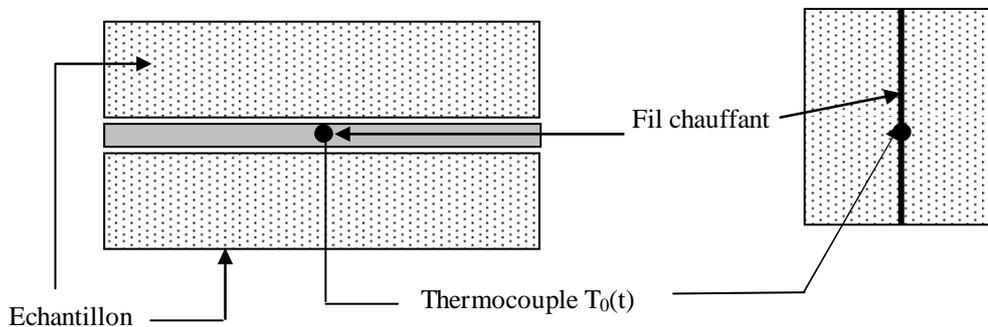


Figure 6.2 : Schéma du montage de la méthode du fil chaud.

6.2 Modélisation du fil chaud

Le voisinage du fil chauffant est schématisé sur la figure 6.3.

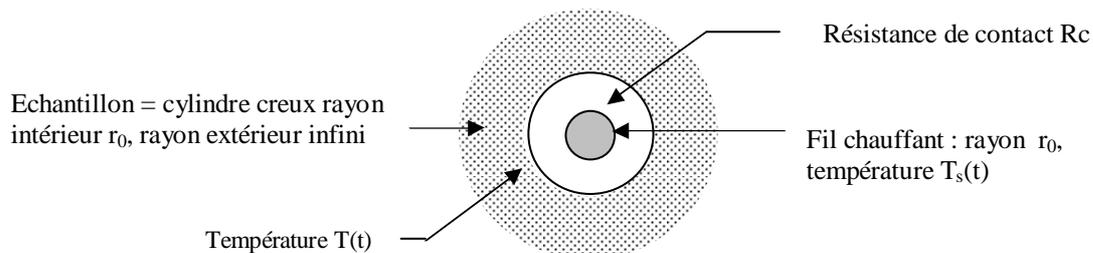


Figure 6.3 : Schéma des transferts autour du fil chaud

L'équation de la chaleur s'écrit dans l'échantillon :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, 0) = T_s(0) = T_i \quad (6.2) \\ T(\infty, t) = T_i \quad (6.3) \\ h [T_s(t) - T(0, t)] = -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial r} \quad (6.4) \\ \varphi_0 = m c \frac{dT_s}{dt} + h S [T_s(t) - T(0, t)] \quad (6.5) \end{array} \right.$$

La résolution de ce système à l'aide du formalisme des quadripôles permet d'écrire l'expression de la transformée de Laplace de $T_s(t)$ sous la forme :

$$\theta_s = \frac{\varphi_0}{p} \frac{A_0 + (A_0 R_c + B_0)/Z}{C_0 + (C_0 R_c + D_0)/Z} \quad (6.6)$$

avec $A_0 = 1$; $B_0 = \frac{1}{2\pi\lambda L q r_0} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} - \frac{1}{\rho c_s \pi r_0^2 L p}$; $C_0 = \rho c_s \pi r_0^2 L p$; $D_0 = \frac{q r_0}{2} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)}$

où :

θ_s	Transformée de Laplace de la différence $T_s(t) - T_s(t=0)$
θ	Transformée de Laplace de la différence $T(t) - T(t=0)$
R_c	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / échantillon
c_s	Capacité calorifique du thermocouple+résistance
λ	Conductivité thermique de l'échantillon
a	Diffusivité thermique de l'échantillon
p	Variable de Laplace
r_0	Rayon du fil chauffant
L	Longueur du fil chauffant
φ_0	Puissance dissipée dans la résistance chauffante
I_0, I_1, K_0, K_1	Fonctions de Bessel

6.3 Estimation des paramètres

Choix de l'intervalle de temps pour l'estimation

Le premier problème consiste à connaître le temps t de chauffage pendant lequel l'hypothèse du milieu semi-infini est valide. On calcule pour cela l'évolution de la température $T_e(t)$ sur un rayon égal à l'épaisseur de l'échantillon ($r = e$) à l'aide des paramètres estimés sur un temps t arbitraire. Si la température $T_e(t)$ calculée diffère de la température initiale $T_e(0)$ de plus de $0,1^\circ\text{C}$ on reprend le calcul d'estimation des paramètres sur un temps plus court.

Etant donné que l'on cherche simplement à estimer le temps pendant lequel le milieu reste semi-infini, on peut se contenter de le faire dans le cas simple (et le plus défavorable) où la résistance de contact et la capacitance thermique de l'ensemble sonde + résistance chauffante sont nulles et où le rayon de la sonde r_0 est très faible. On montre que pendant le temps où le milieu est semi-infini on peut calculer θ_e par :

$$\theta_e(p) = \frac{\varphi_0}{\left(C + \frac{D}{Z}\right)p} \quad (6.7)$$

Avec les valeurs suivantes :

$$C = 2\pi L \rho c p r_0 e [K_1(q r_0) I_1(q e) - K_1(q e) I_1(q r_0)]$$

$$D = q r_0 [K_0(q e) I_1(q r_0) + K_1(q r_0) I_0(q e)] \quad (6.8)$$

$$\frac{1}{Z} = 2\pi \lambda L q r_0 \frac{K_1(q r_0)}{K_0(q r_0)}$$

T_e est calculable en appliquant la méthode de Stehfest à la formule (6.6).

Cette formule est valable tout le temps que la température T_e n'a pas varié. Elle peut donc être utilisée pour déterminer (en utilisant la méthode de Stehfest) l'instant à partir duquel T_e va commencer à varier mais ne permettra pas de déterminer l'évolution de T_e après cet instant.

Exemple :

Détermination de la conductivité thermique d'un carbure à l'aide d'un fil chaud de longueur 5 cm délivrant un flux égal à 3,03 W. Les figures 3.8 et 3.9 représentent le graphe de la température expérimentale T_0 obtenue avec un échantillon d'épaisseur 2,5cm, celle-ci étant enregistrée toutes les 0,05s. On a fait figurer sur ce même graphe :

- La température T_e de la face non-chauffée calculée par la formule (3.3) en prenant comme valeur de l'effusivité thermique $E = 5000 \text{ SI}$.
- La température T_{0c} calculée par un modèle simplifié aux temps longs après estimation de la conductivité thermique par régression linéaire de la courbe $T_0(t) = f[\ln(t)]$ entre les temps t_1 et t_2 (détail ci-après).

La figure 6.4 correspond à une estimation entre 20 et 80s conduisant à une valeur $\lambda = 10,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$. La figure 6.5 correspond à une estimation entre 2 et 20s conduisant à une valeur $\lambda = 19,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$. Le graphe de la température $T_e(t)$ calculée ainsi que la forme de la courbe expérimentale $T_s(t) - T_s(0)$ qui subit une modification de pente à $t = 20\text{s}$ nous montre que la première estimation de λ (entre 20 et 80s) n'est pas valide car elle est réalisée sur des temps où l'hypothèse du milieu semi-infini n'est plus valable (la perturbation a atteint l'autre face). La valeur de λ obtenue par régression linéaire entre 2 et 20s est quant à elle obtenue dans des conditions satisfaisantes : zone de linéarité de la courbe $T_s(t) - T_s(0) = f[\ln(t)]$ et température de la face non chauffée constante. L'incertitude sur cette estimation provient principalement de l'incertitude sur la température : l'estimation est réalisée sur une élévation de température de l'ordre de 1°C alors que l'incertitude sur la température est de l'ordre de $0,1^\circ\text{C}$. Ceci montre les limites de la méthode du fil chaud pour l'estimation des conductivités thermiques élevées.

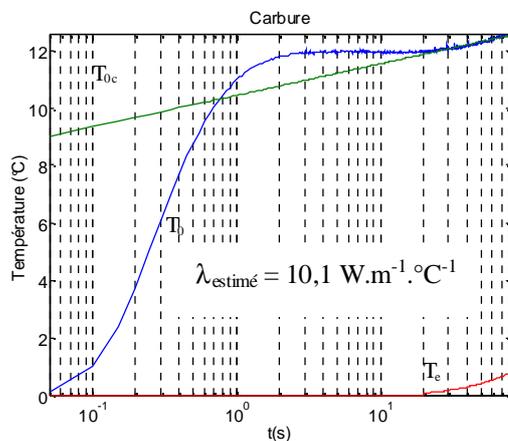


Figure 6.4 : Thermogramme fil chaud pour un carbure, estimation entre 20 et 80s.

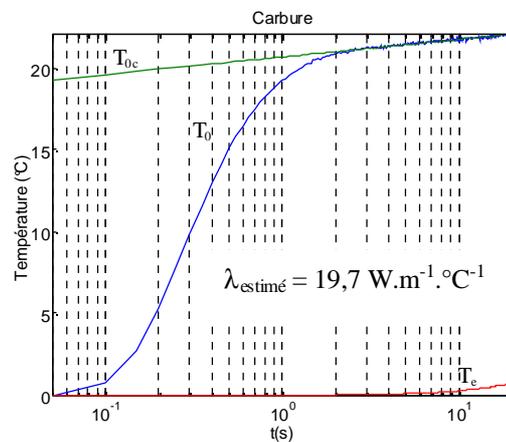


Figure 6.5 : Thermogramme fil chaud pour un carbure, estimation entre 2 et 20s.

Estimation simplifiée aux temps longs

La température du fil s'écrit dans l'espace de Laplace : $\theta_s = \frac{\varphi_0}{p} \frac{A_0 + (A_0 R_c + B_0)/Z}{C_0 + (C_0 R_c + D_0)/Z}$

$$\text{avec } A_0 = 1 ; B_0 = \frac{1}{2\pi\lambda L q r_0} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} - \frac{1}{\rho c_s \pi r_0^2 L p} ; C_0 = \rho c_s \pi r_0^2 L p ; D_0 = \frac{q r_0}{2} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)}$$

$$\frac{1}{Z} = 2\pi\lambda L q r_0 \frac{K_1(q r_0)}{K_0(q r_0)}$$

Si l'on considère un fil fin (r_0 petit) et si l'on se place aux temps longs ($p \rightarrow 0$), nous pouvons utiliser les développements limités des fonctions de Bessel au voisinage de 0 :

$$K_0(x) \approx -\ln(x) ; K_1(x) \approx 1/x ; I_0(x) \approx 1 ; I_1(x) \approx x/2$$

$$\text{Qui conduisent à } A_0 = 1 ; B_0 = 0 ; C_0 = \rho c_s \pi r_0^2 L p ; D_0 = 1 ; \frac{1}{Z} = -\frac{2\pi\lambda L}{\ln(q r_0)}$$

On en déduit :

$$\theta_s = \frac{\varphi_0}{p} \frac{Z + R_c}{m_s c_s p (R_c + Z) + 1} \approx \frac{\varphi_0}{p} (Z + R_c) \approx \frac{\varphi_0}{p} \left(-\frac{\ln\left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{2\pi\lambda L} + R_c \right) \approx \frac{\varphi_0}{p} \left(-\frac{\ln(p)}{4\pi\lambda L} - \frac{\ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{4\pi\lambda L} + R_c \right) \quad (6.9)$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse (cf. annexe A.4) permet de calculer la température $T_s(t)$ aux temps longs :

$$T_s(t) - T_s(0) \approx \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L} \ln(t) + R_c \varphi_0 - \frac{\gamma \varphi_0}{4\pi\lambda L} - \frac{\varphi_0 \ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{2\pi\lambda L} \quad (6.10)$$

où $\gamma = 0,57721$ est la constante d'Euler.

$$\text{soit finalement : } T_s(t) - T_s(0) \approx \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L} \ln(t) + \varphi_0 \left[R_c - \frac{\ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{\gamma}{4\pi\lambda L} \right] \quad (6.11)$$

Le tracé de $T_s(t) - T_s(t=0)$ en fonction de $\ln(t)$ est donc une droite de pente $\frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L}$ dont la détermination permet de calculer la conductivité thermique λ . L'inertie de la sonde et la résistance de contact n'influent pas sur la température aux temps longs. Pour appliquer cette méthode d'estimation, il faut s'assurer que l'hypothèse du milieu semi-infini reste valable sur l'intervalle d'estimation choisi. Les bruits de mesure sur les valeurs des températures aux différents temps de mesure étant constants et non corrélés, on utilise la méthode des moindres carrés linéaires pour estimer la pente.

6.4 Réalisation pratique de la mesure

Cette méthode de mesure de la conductivité thermique peut être appliquée aussi bien pour les solides que pour les liquides (voire les gaz). Dans le cas des solides indéformables, le fil chauffant est inséré entre deux feuilles plastiques très minces. Un thermocouple plat est inséré dans une feuille plastique au centre du fil chauffant. Dans le cas des solides pulvérulents (grains, poudres...), le fil chauffant est placé avec le thermocouple dans un cylindre de très petit diamètre. Ce cylindre est inséré dans le matériau à caractériser avant de démarrer le chauffage et l'acquisition de la température.

Ces montages permettent d'obtenir un profil linéaire pour la courbe $T_s(t) - T_s(0) = f[\ln(t)]$ et d'évaluer ensuite avec une bonne précision la valeur de la conductivité thermique λ . La principale source d'incertitude est la valeur de la densité linéique de flux de chaleur $\frac{\varphi_0}{L}$, la mesure de la puissance électrique est précise, mais il faut utiliser une longueur de chauffe suffisante pour diminuer l'incertitude sur S .

La mise en œuvre de la méthode nécessite en outre une alimentation stabilisée et un dispositif d'enregistrement de la tension délivrée aux bornes du thermocouple. Un enregistrement d'une durée de 120 secondes après le début du chauffage est en général suffisant pour déterminer la conductivité thermique λ avec une bonne précision. Il est important comme cela a été montré ci-dessus de bien choisir l'intervalle d'estimation sur lequel les conditions suivantes doivent être respectées : linéarité de la courbe $T_s(t) - T_s(0) = f[\ln(t)]$ et température de la face non chauffée constante.

Informations techniques : http://www.smee.fr/fr/accueil_ctmetre.htm

6.5 Limites de la méthode

Rappelons que cette méthode repose sur un certain nombre d'hypothèses :

- Le milieu à caractériser est supposé semi-infini
- Les transferts autres que radiaux dans la sonde (fil) sont négligés

De plus si l'on utilise la méthode simplifiée reposant sur l'exploitation de la pente de la courbe $T(t)=f[\ln(t)]$, on suppose que l'influence de l'inertie thermique de la sonde devient rapidement négligeable.

Cette méthode peut donc conduire à des résultats imprécis dans un certain nombre de cas :

- Mesures sur des matériaux très légers car dans ce cas l'influence de la masse du fil ne devient négligeable qu'au bout de plusieurs dizaines de secondes. L'échantillon devra être de dimensions suffisantes pour le temps pendant lequel le milieu reste semi-infini soit supérieur au temps d'influence de la masse de la sonde.
- Mesure sur des matériaux très diffusifs : l'hypothèse du milieu semi-infini n'est valable que pendant un temps très court qui peut être insuffisant pour une bonne exploitation des mesures.
- Mesures sur des matériaux super-isolants avec un fil chaud inséré dans une feuille de Kapton : la conductivité thermique du Kapton étant 10 fois supérieure à celle de l'isolant, les transferts dans le plan de la feuille ne sont plus négligeables par rapport au transfert dans le matériau.

7 METHODE FLASH

7.1 Principe de la méthode

Flash : Eclairage très bref de la surface par des lampes de forte puissance

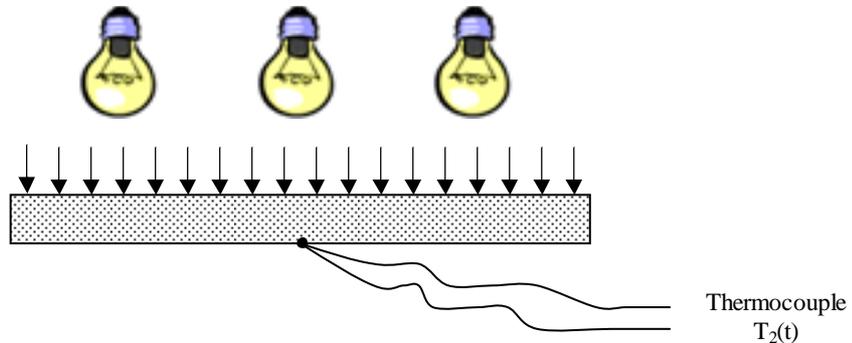


Figure 7.1. Schéma de principe de la méthode flash

Cette méthode permet d'estimer la diffusivité thermique des solides. Son schéma de principe est décrit sur la figure 7.1. On envoie sur l'une des faces d'un échantillon à faces parallèles un flux lumineux de forte puissance pendant un temps très court. Un thermocouple en contact avec la face arrière permet d'enregistrer l'élévation de sa température à partir du moment où la face avant a reçu le flash. Une modélisation des transferts de chaleur dans l'échantillon a permis à plusieurs auteurs de proposer des méthodes d'estimation de la diffusivité thermique à partir du thermogramme expérimental. La simplicité de certaines de ces méthodes a rendu la méthode flash très populaire, un certain nombre de précautions expérimentales doivent toutefois être respectées pour atteindre une bonne précision.

7.2 Modélisation de la méthode Flash

Les hypothèses suivantes sont généralement retenues :

- Uniformité du flux radiatif absorbé sur toute la surface de l'échantillon,
- Température uniforme et égale à la température ambiante à $t = 0$,
- Coefficient d'échange convectif identique sur toutes les faces.

Nous ferons dans un premier temps l'hypothèse que les pertes latérales ont une influence négligeable sur la température mesurée au centre de la face arrière ce qui est vrai si l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions. Nous verrons en fin de paragraphe comment ces pertes latérales peuvent être incluses dans le modèle établi.

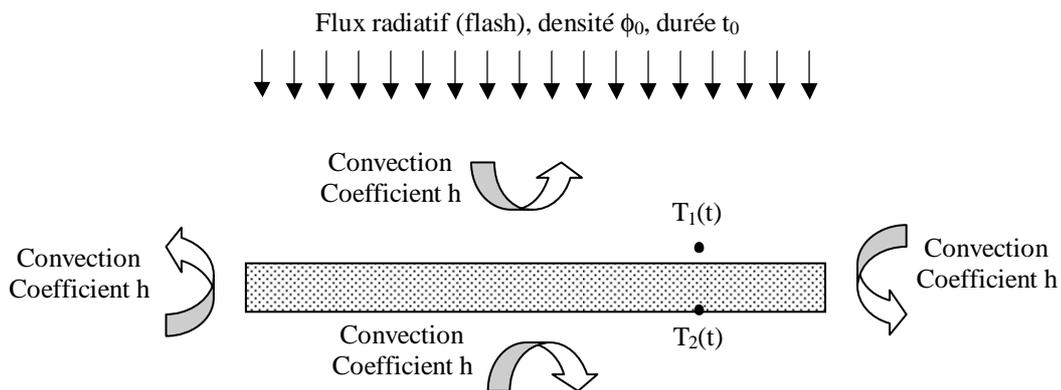


Figure 7.2 : Schématisation des flux de chaleur dans la méthode flash.

En posant : $\theta_1(p) = L[T_1(t) - T_a]$, $\theta_2(p) = L[T_2(t) - T_a]$, $\Phi_1(p) = L[\varphi_1(t)]$ et $\Phi_2(p) = L[\varphi_2(t)]$, la méthode des quadripôles permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_1(p) \\ \Phi_1(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ \lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2(p) \\ \Phi_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2(p) \\ \Phi_2(p) \end{bmatrix}$$

Nous pouvons écrire le bilan thermique de la face avant : $\phi_0(t) = \phi_1(t) + h [T_1(t) - T_a]$

Puis celui de la face arrière : $\phi_2(t) - h [T_2(t) - T_a] = 0$

D'où dans l'espace de Laplace : $\Phi_1(p) = L[\phi_0(t)] - h \theta_1(p)$ où $\phi_0(t) = \phi_0$ si $t < t_0$ et $\phi_0(t) = 0$ si $t > t_0$.

D'après les propriétés de la transformation de Laplace:

$$\Phi_0(p) = L[\phi_0(t)] = \frac{\phi_0}{p} [1 - \exp(-pt_0)]$$

En combinant ces relations, on arrive au résultat :

$$\theta_2(p) = \frac{\phi_0}{p} \frac{1 - \exp(-pt_0)}{C + 2Ah + Bh^2} \quad (7.1)$$

Cas particuliers

Durée de flash très courte

On peut assimiler le flux à une fonction de Dirac et écrire $\Phi_0(p) = 1$

Convection négligeable

C'est le cas au début du thermogramme ou pour les matériaux très diffusifs.

En analysant les courbes théoriques présentées sur la figure 7.3, on retiendra que les modèles ne prenant pas en compte les pertes latérales ne peuvent être utilisés que pour les matériaux à forte diffusivité thermique comme les métaux ou au début du thermogramme.

Convection non négligeable y compris sur les parois latérales

Il a été montré dans la modélisation du plan chaud que les pertes latérales peuvent être prises en compte dans le modèle quadripolaire en remplaçant la variable p par le groupement $p + \frac{h a p_e}{\lambda S}$ où :

- p_e Périmètre de l'échantillon
- λ Conductivité thermique
- S Surface de la face chauffée.
- a Diffusivité thermique de l'échantillon.

Cette formulation conduit toutefois à une surestimation de l'influence des pertes latérales sur la mesure de la température au centre de la face arrière, elle est d'autant plus exacte que la conductivité thermique est élevée.

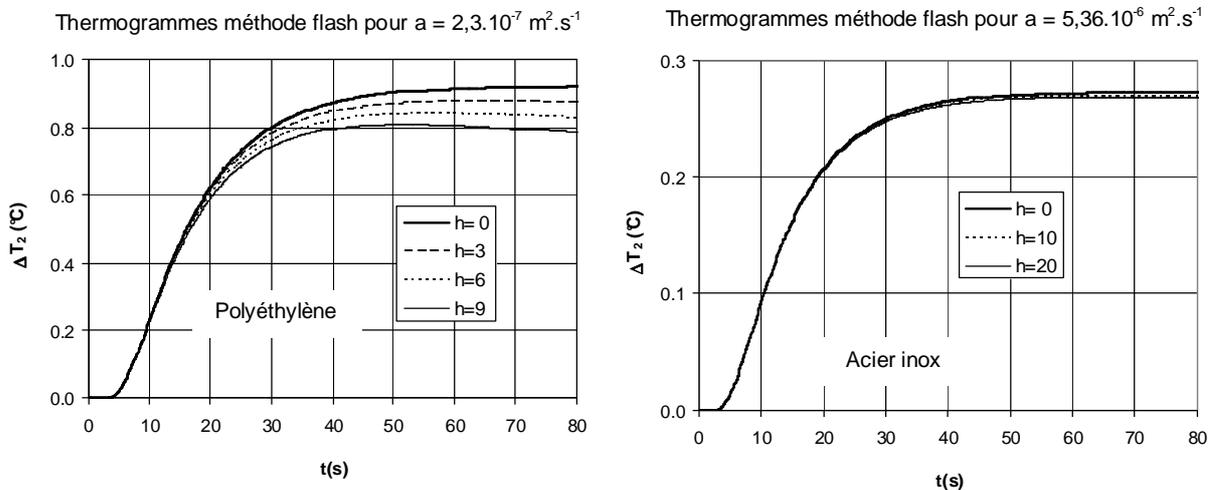


Figure 7.3 : Thermogrammes pour deux matériaux différents et plusieurs valeurs du coefficient de convection

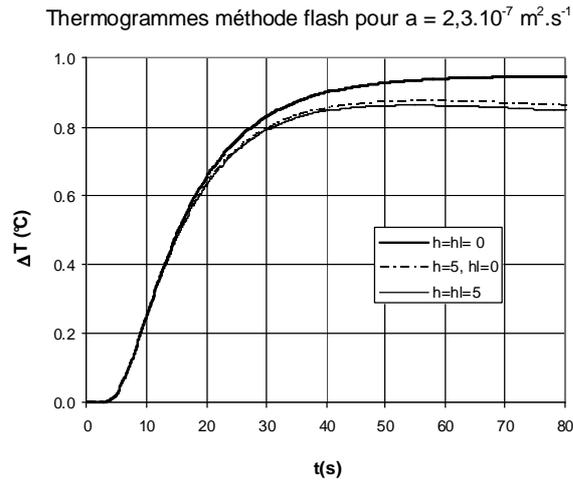


Figure 7.4 : Influence des pertes convectives latérales sur le thermogramme du polyéthylène.

En analysant les courbes théoriques présentées sur la figure 7.4, on retiendra que les pertes latérales ont une très faible influence sur le thermogramme même pour un matériau de faible diffusivité thermique. On notera également que les relations utilisées surestiment l'influence des pertes latérales sur la température mesurée au centre de l'échantillon et que ceci est d'autant plus vrai que les dimensions latérales de l'échantillon sont grandes par rapport à son épaisseur.

En conclusion, en choisissant un échantillon de largeur au moins égale à 6 fois son épaisseur on pourra négliger l'influence des pertes convectives latérales. Il a de plus été montré que ces pertes latérales sont proportionnelles aux pertes convectives sur la face avant.

7.3 Estimation de la diffusivité thermique

L'analyse du thermogramme expérimental enregistré sur la face non irradiée permet de déterminer, en utilisant des techniques de dépouillement déjà existantes, la diffusivité thermique de l'échantillon.

Méthode de Parker (Parker, 1961)

Cette méthode ne s'applique que dans le cas où la durée de l'éclair de flash est très petite et où les pertes thermiques sur les différentes faces de l'échantillon sont négligeables.

La diffusivité thermique est calculée à partir du temps $t_{1/2}$ nécessaire pour la température $T_2(t)$ de la face arrière soit égale à la moitié de la température maximale atteinte T_{2m} :

$$a = \frac{1,38 e^2}{\pi^2 t_{1/2}} \quad (7.2)$$

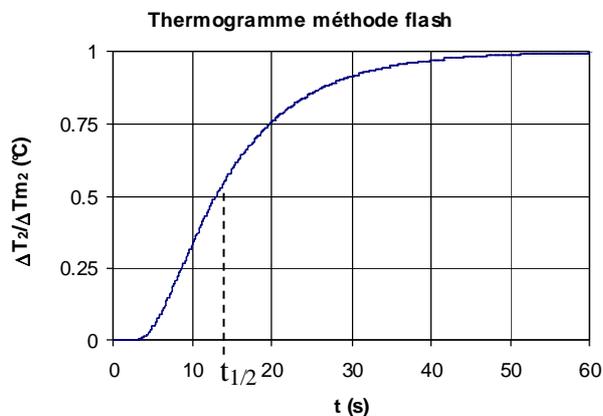


Figure 7.5 : Courbe théorique de la température réduite de la face arrière.

Méthode des temps partiels (Degiovanni, 1977)

Cette méthode prend en compte les pertes thermiques mais ne s'applique toutefois que dans le cas où la durée de l'éclair de flash est très petite.

Son principe repose sur l'utilisation de quatre points du thermogramme représentés sur la figure 7.6.

La diffusivité thermique peut être obtenue par les formules suivantes (Degiovanni, 1977) :

$$a = \frac{e^2}{t_{5/6}} \left(1,131 - 1,222 \frac{t_{2/3}}{t_{5/6}} \right) \quad (7.3)$$

$$a = \frac{e^2}{t_{5/6}} \left[0,954 - 1,581 \frac{t_{1/2}}{t_{5/6}} + 0,558 \left(\frac{t_{1/2}}{t_{5/6}} \right)^2 \right] \quad (7.4)$$

$$a = \frac{e^2}{t_{5/6}} \left[0,818 - 1,708 \frac{t_{1/3}}{t_{5/6}} + 0,885 \left(\frac{t_{1/3}}{t_{5/6}} \right)^2 \right] \quad (7.5)$$

Où :

- e est l'épaisseur de l'échantillon en m
- t_p est le temps écoulé depuis l'excitation pour que la température la face arrière s'élève de p fois son élévation maximale au cours de l'expérience (voir figure 7.6).

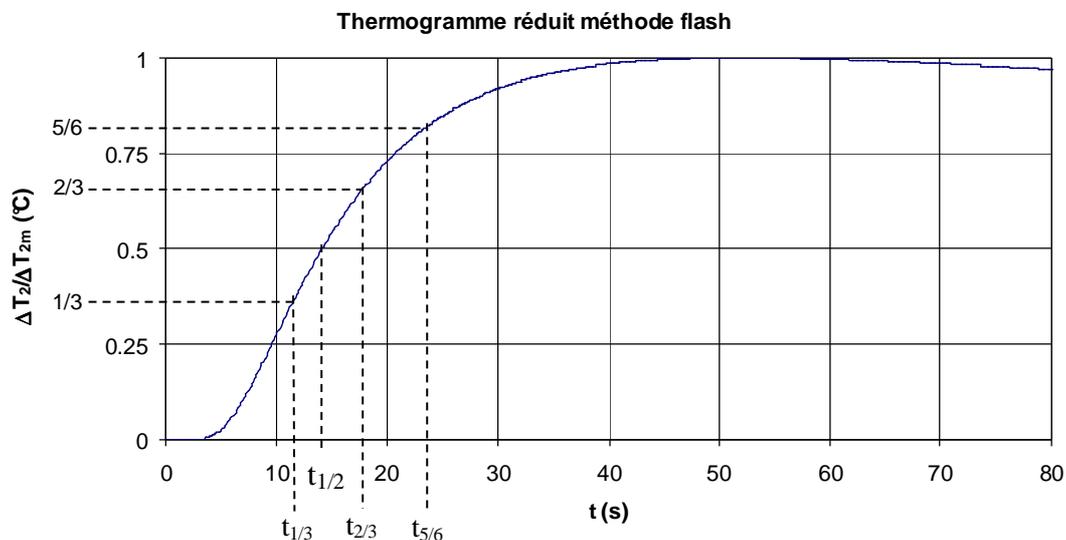


Figure 7.6 : Courbe théorique de la température réduite de la face arrière

On retient en général une moyenne des trois valeurs obtenues. Cette méthode est plus précise que la méthode de Parker car elle prend en compte les pertes convectives mais présente l'inconvénient de n'utiliser qu'un nombre très réduit de points du thermogramme.

Méthode des moments temporels (Degiovanni et Laurent, 1986)

Cette méthode prend en compte les pertes thermiques mais ne s'applique toutefois que dans le cas où la durée de l'éclair de flash est très petite. Elle présente l'avantage par rapport à la méthode des moments partiels d'utiliser tous les points du thermogramme dans la méthode d'estimation à travers le calcul d'intégrales. La diffusivité thermique est calculée par :

$$a = e^2 \frac{F(M_{-1})}{M_0} \quad (7.6)$$

Où M_0 et M_1 sont les moments partiels d'ordre 0 et 1 définis par :

$$M_0 = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,8}} \frac{T_2(t)}{T_{2m}} dt \quad \text{et} \quad M_{-1} = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,8}} \frac{1}{t} \frac{T_2(t)}{T_{2m}} dt$$

Avec : $F(x) = 0,08548 - 0,314 (0,5486 - x) + 0,5 (0,5486 - x)^{2,63}$ pour $x > 0,27$
 $F(x) = -0,08519 + 0,305 x$ pour $x > 0,44$

Les intégrales figurant dans le calcul de M_0 et M_1 sont calculées numériquement à partir de l'ensemble des points du thermogramme expérimental.

Le thermogramme peut être recalculé à l'aide d'une expression modifiée sous la forme :

$$\theta(p) = \frac{Q}{q \sinh(qe) + 2 \frac{Bi}{e} \cosh(qe) + \frac{Bi^2}{qe^2} \sinh(qe)} \quad (7.7)$$

La méthode des moments temporels partiels permet en effet d'estimer également le nombre de Biot $Bi = \frac{he}{\lambda}$ par l'expression suivante dans laquelle $x = M_1$:

$$Bi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \quad (7.8)$$

Les valeurs des coefficients a_i sont données dans le tableau 7.1.

Tableau 7.1 : Coefficients pour le calcul du nombre de Biot

i	$0,504 < x < 0,56$	$0,44 < x < 0,56$
0	$8,438722459 \cdot 10^2$	$1,085995148 \cdot 10^2$
1	$-6,380615082 \cdot 10^3$	$-8,014914481 \cdot 10^2$
2	$1,812577990 \cdot 10^4$	$2,25713259 \cdot 10^3$
3	$-2,291931835 \cdot 10^4$	$-2,867489088 \cdot 10^3$
4	$1,088033541 \cdot 10^4$	$1,382587042 \cdot 10^3$

Il suffit alors d'estimer le seul paramètre inconnu Q pour pouvoir recalculer la température en appliquant la méthode de Stehfest pour calculer la transformée de Laplace inverse de la relation (7.7).

Méthode des moments temporels (Degiovanni et Laurent, 1986)

Cette méthode prend en compte les pertes thermiques mais ne s'applique toutefois que dans le cas où la durée de l'éclair de flash est très petite. Elle présente l'avantage par rapport à la méthode des moments partiels d'utiliser tous les points du thermogramme dans la méthode d'estimation à travers le calcul d'intégrales. La diffusivité thermique est calculée par :

$$a = e^2 \frac{F(M_{-1})}{M_0} \quad (7.9)$$

Où M_0 et M_1 sont les moments partiels d'ordre 0 et 1 définis par :

$$M_0 = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,8}} \frac{T_2(t)}{T_{2m}} dt \quad \text{et} \quad M_{-1} = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,8}} \frac{1}{t} \frac{T_2(t)}{T_{2m}} dt$$

Avec :

$$F(x) = 0,08548 - 0,314 (0,5486 - x) + 0,5 (0,5486 - x)^{2,63} \quad \text{pour } x > 0,27$$

$$F(x) = -0,08519 - 0,305 x \quad \text{pour } x > 0,44$$

Les intégrales figurant dans le calcul de M_0 et M_{-1} sont calculées numériquement à partir de l'ensemble des points du thermogramme expérimental.

Estimation à partir du modèle complet

Cette méthode s'applique dans tous les cas de figure, y compris si la durée t_0 de l'éclairement est longue. On applique la méthode de Levenberg-Marquart ou du simplex pour déterminer les valeurs de la diffusivité thermique a , du flux de chaleur ϕ_0 et du coefficient de transfert par convection h qui minimisent la somme des écarts quadratiques entre les points expérimentaux $T_{\text{exp}}(t_i)$ et les points $T_{\text{mod}}(t_i)$ calculés par inversion numérique de Laplace de la relation (3.5).

7.4 Réalisation pratique de la mesure

Réalisation de l'éclairement :

Pour obtenir un éclairement de très forte puissance pendant une durée très courte, on utilise des lampes à éclats alimentées par la décharge d'une batterie de condensateurs ou un laser. La durée de l'éclairement est de l'ordre de 1ms.

On peut également utiliser de manière plus rustique une simple lampe halogène avec une durée d'éclairement qui peut alors atteindre plusieurs dizaines de secondes pour obtenir une quantité de flux rayonné suffisante. L'estimation des paramètres doit alors être effectuée à partir du modèle complet.

Quelque soit le mode d'éclairement utilisé, il faut s'assurer que l'éclairement ne puisse pas atteindre les faces latérales et la face arrière par réflexion. Pour les échantillons réflecteurs, on recouvre la face avant d'une fine couche de peinture noir mat.

Mesure de la température de la face arrière

L'élévation de température de la face arrière pouvant être faibles, la température est mesurée de préférence avec un thermocouple ayant un fort pouvoir thermoélectrique : on utilise souvent le tellure de bismuth (Bi_2Te_3) ayant un pouvoir thermoélectrique de $360\mu\text{V}\cdot\text{C}^{-1}$ à 20°C et de $400\mu\text{V}\cdot\text{C}^{-1}$ à 80°C . On utilise la méthode du thermocouple à contacts séparés : les extrémités des deux fils du thermocouple ne se touchent pas, ils sont maintenus en contact par pression avec la face arrière en deux points proche du centre de l'échantillon et distants de quelques mm. Le contact électrique entre les deux fils du thermocouple est assuré par la face arrière de l'échantillon. Si l'échantillon n'est pas conducteur électrique, on recouvre la face arrière d'une très fine couche de laque d'argent.

L'élévation de température de la face arrière peut également être mesurée à l'aide d'un détecteur optique qui mesure une grandeur proportionnelle au flux de chaleur émis par cette face. Ce flux peut être considéré comme proportionnel à l'élévation de température pour les très faibles variations mesurées. L'avantage de ce dispositif est le temps de réponse très court ce qui est un avantage par rapport au thermocouple dans le cas d'un matériau très diffusif dont le thermogramme flash peut être extrêmement court. On peut également utiliser une caméra infra-rouge moins précise mais qui permet d'obtenir un champ de température.

Exemples de mesures

Sur le premier exemple on a réalisé un éclairement d'une durée de 30s à l'aide d'une lampe halogène de 500W sur un échantillon de brique de terre stabilisée d'épaisseur 5 cm. On trouvera sur la figure 7.7.a) la représentation de la courbe expérimentale (Meukam, 2004) et de la courbe théorique tracée à l'aide des paramètres estimés par la méthode complète décrite ci-dessus. La valeur de la diffusivité estimée est $a = 5,25 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

Sur le deuxième exemple on a réalisé un éclairement d'une durée de 1ms à l'aide d'une lampe à éclats sur un échantillon de carbone d'épaisseur 6,58mm. La température a été mesurée par un détecteur optique présentant un

temps de réponse très court adapté à des mesures très rapides telle que celle présentée. On trouvera sur la figure 3.16.b) la représentation de la courbe expérimentale et de la courbe théorique tracée à l'aide des paramètres estimés par la méthode complète décrite ci-dessus. La valeur de la diffusivité estimée est $a = 1,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

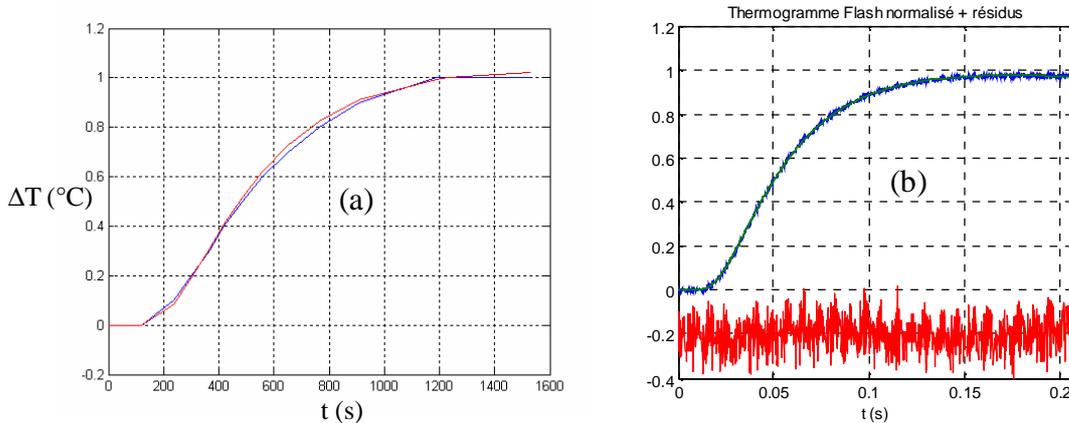


Figure 7.7 : Thermogrammes expérimentaux et théorique (a) brique de terre, (b) carbone.

7.5 Limites de la méthode

La méthode flash repose sur deux conditions :

- Le flux lumineux envoyé sur la face avant est absorbé par la surface et ne « pénètre » pas dans l'échantillon.
- On mesure en face arrière une grandeur proportionnelle à l'élévation de température.

Ces deux conditions excluent du champ d'application les matériaux très légers et les milieux poreux. En effet il est très difficile de mesurer la température de surface d'un milieu très léger, la solution du thermocouple est inapplicable dans ce cas. Dans le cas d'un milieu poreux, le flash envoyé sur la face avant n'est pas absorbé intégralement au niveau de la surface, une partie pénètre dans la masse de l'échantillon à travers la porosité et fausse la mesure. Dans ces deux cas, la méthode du tricouche développée spécifiquement pour ces types de matériaux est à préférer à la méthode Flash.

8 METHODE DU TRICOUCHE

8.1 Introduction

Les méthodes de mesure classiques sont parfois mal adaptées à la détermination de la conductivité thermique des matériaux isolants très légers. Les méthodes transitoires par contact utilisant des sources de chaleur planes : hot disk (Gustafsson 1991, He 2005), fil chaud (Nagazaka et Nagashima 1981), plan chaud (Zhang et Degiovanni 1993), ruban chaud (Hammerschmidt 2003, Jannot et Meukam 2004) ne permettent pas une bonne estimation de la conductivité thermique dans le cas d'isolants très légers pour les raisons suivantes :

- La capacité et la résistance thermique des sondes (hétérogènes, constituées en général d'un filament métallique inséré entre deux films plastiques) n'est pas connue avec précision et souvent prise en compte de manière approchée dans les modèles,
- La sensibilité de la température mesurée à cette capacité est d'autant plus forte que la capacité thermique de l'isolant est faible,
- La conductivité thermique de la sonde est supérieure à celle de l'isolant ce qui implique que les transferts de chaleur longitudinaux (parallèlement à la surface de contact sonde/échantillon) dans la sonde qui ne sont pas pris en compte dans les modèles peuvent devenir non négligeables et biaiser les estimations.

La méthode flash (Degiovanni et Laurent 1986) est également difficile à appliquer pour les raisons suivantes :

- Les isolants sont souvent semi-transparents vis-à-vis du rayonnement du flash,
- La mesure de température de surface sur un matériau très léger est difficile à réaliser avec précision,
- Les échanges sur la surface irradiée sont souvent très différents des échanges sur la surface opposée (différences de températures importantes)

Il devient donc indispensable de prendre en sandwich le matériau entre deux plaques conductrices pour éviter les deux premiers inconvénients ; un dispositif reposant sur ce principe a déjà été utilisé pour les liquides (Rémy et Degiovanni 2005). Dans le cas de matériaux très légers, on démontre toutefois que la sensibilité de la température de la face non irradiée à la conductivité thermique est très corrélée à la sensibilité aux pertes et que la sensibilité à la diffusivité thermique est très faible. La méthode du tricouche permet l'estimation de la conductivité thermique des matériaux isolants très légers.

8.2 Principe et dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'un échantillon cylindrique ($R = 2\text{cm}$, $e = 5$ à 10mm) du matériau à caractériser inséré entre deux disques de laiton d'épaisseur $0,4\text{mm}$ et de même rayon (cf. figure 8.1). Deux thermocouples de type K de diamètre de fils $0,05\text{mm}$ sont fixés par la technique du contact séparé sur la face extérieure de chaque disque en laiton. Le disque inférieur est en contact direct avec une résistance chauffante plane circulaire de même diamètre placée sur un bloc isolant. Une pression est appliquée sur la face supérieure par l'intermédiaire de 4 points en PVC (matériau choisi pour sa faible conductivité thermique) de très faible surface de contact. Le reste de la surface supérieure échange par convection naturelle avec l'air ambiant.

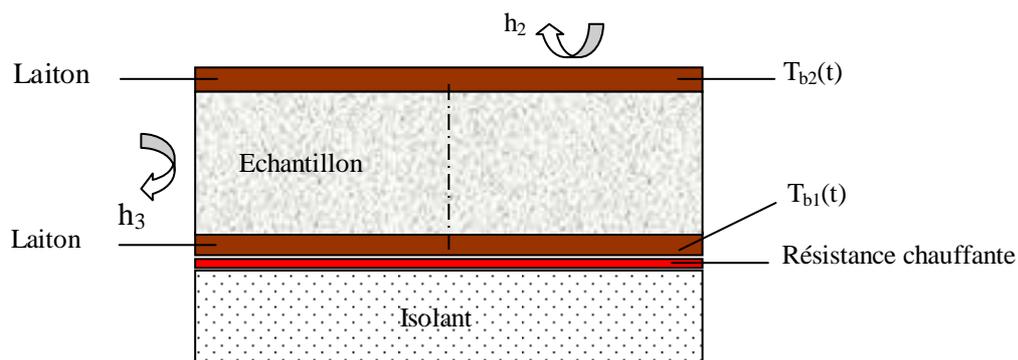


Figure 8.1 : Dispositif expérimental

On applique un créneau de flux d'une durée de quelques secondes à la résistance chauffante et on relève les évolutions des températures $T_{b1}(t)$ et $T_{b2}(t)$ des deux disques de laiton. La modélisation 3D des transferts de chaleur associée à une méthode d'estimation de paramètres permet d'en déduire la conductivité thermique et la diffusivité thermique du matériau (isolant) situé entre les deux disques en laiton.

Le choix d'un créneau de quelques secondes produit par une résistance plane plutôt qu'un flash très bref envoyé par une lampe (dispositif initialement testé) est motivé par plusieurs raisons :

- La montée de température de la face chauffée doit présenter une vitesse compatible avec le temps de réponse du thermocouple,
- La résistance plane permet d'exercer plus facilement une pression sur les disques permettant ainsi de minimiser les résistances de contact,

Une faible part du flash peut atteindre les surfaces latérales par réflexion, cet inconvénient est évité avec une résistance chauffante plane.

8.3 Modélisation et principe de la méthode

Hypothèses :

- Température uniforme dans les disques en laiton
- Résistances de contact négligeables entre l'échantillon et les disques en laiton.

On modélise dans un premier temps l'évolution de la température dans le cas d'un chauffage bref sur un échantillon seul soumis à de la convection sur toutes ses faces (absence des disques de laiton, cf. figure 8.2).

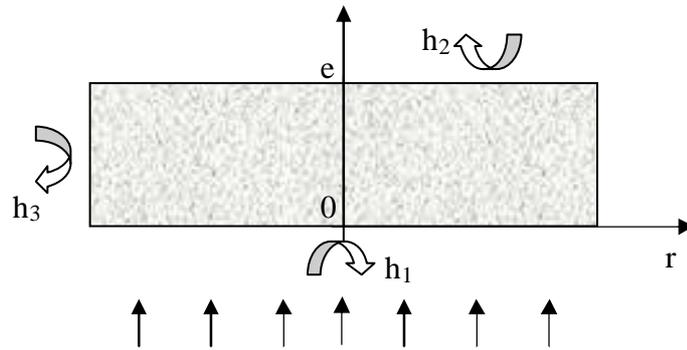


Figure 8.2 : Schéma de l'expérimentation avec un échantillon simple

On pose $\bar{T}(r, z, t) = T(r, z, t) - T_e$

La température suit l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{T}(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}(r, z, t)}{\partial t} \quad (8.1)$$

Les conditions initiales et aux limites s'écrivent :

$$z = 0 \rightarrow \lambda \frac{\partial \bar{T}(r, 0, t)}{\partial z} = h_1 \bar{T}(r, 0, t) - \phi_0(t) \quad (8.2)$$

$$z = e \rightarrow -\lambda \frac{\partial \bar{T}(r, e, t)}{\partial z} = h_2 \bar{T}(r, e, t) \quad (8.3)$$

$$r = 0 \rightarrow \frac{\partial \bar{T}(0, z, t)}{\partial r} = 0 \quad (8.4)$$

$$r = R \rightarrow -\lambda \frac{\partial \bar{T}(R, z, t)}{\partial r} = h_3 \bar{T}(R, z, t) \quad (8.5)$$

$$t = 0 \rightarrow \bar{T}(r, z, 0) = 0 \quad (8.6)$$

La transformation de Laplace appliquée à (1) avec $L[\bar{T}(r, z, t)] = \theta(r, z, p)$ conduit à :

$$\frac{\partial^2 \theta(r, z, p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(r, z, p)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta(r, z, p)}{\partial z^2} = \frac{p}{a} \theta(r, z, p) \quad (8.7)$$

Les transformées des conditions aux limites s'écrivent :

$$\lambda \frac{\partial \theta(r, 0, p)}{\partial z} = h_1 \theta(r, 0, p) - \Phi_0(p) \quad (8.8)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(r, e, p)}{\partial z} = h_2 \theta(r, e, p) \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial \theta(0, z, t)}{\partial r} = 0 \quad (8.10)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(R, z, t)}{\partial r} = h_3 \theta(R, e, t) \quad (8.11)$$

$$\theta(r, z, 0) = 0 \quad (8.12)$$

On procède par séparation de variables en posant : $\theta(r, z, p) = R(r, p) Z(z, p)$

$$\text{On aboutit à : } \theta(r, z, p) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \{ \beta_n \text{ch}[\gamma_n (e - z)] + H_2 \text{sh}[\gamma_n (e - z)] \} \quad (8.13)$$

$$\text{Où : } A_n = \frac{2 \Phi_0(p) \frac{e}{\lambda}}{\omega_n \left(1 + \frac{\omega_n^2}{H_3^2} \right) J_1(\omega_n) \left[(\beta_n^2 + H_2 H_1) \text{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1) \text{ch}(\beta_n) \right]} \quad (8.14)$$

ω_n solution de : $\omega J_1(\omega) = H_3 J_0(\omega)$

$$\beta_n = \sqrt{\frac{p e^2}{a} + \left(\frac{e}{R} \right)^2 \omega_n^2}$$

$$H_1 = \frac{e h_1}{\lambda} \quad ; \quad H_2 = \frac{e h_2}{\lambda} \quad ; \quad H_3 = \frac{h_3 R}{\lambda}$$

On peut en déduire les températures moyennes en $z = 0$ et $z = e$ par intégration entre 0 et R :

$$\theta_{\text{moy}}(0, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \Phi_0(p) \frac{e}{\lambda} [\beta_n \text{ch}(\beta_n) + H_2 \text{sh}(\beta_n)]}{\omega_n^2 \left(1 + \frac{\omega_n^2}{H_3^2} \right) \left[(\beta_n^2 + H_2 H_1) \text{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1) \text{ch}(\beta_n) \right]} \quad (8.15)$$

$$\theta_{\text{moy}}(e, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \Phi_0(p) \frac{e}{\lambda} \beta_n}{\omega_n^2 \left(1 + \frac{\omega_n^2}{H_3^2} \right) \left[(\beta_n^2 + H_2 H_1) \text{sh}(\beta_n) + \beta_n (H_2 + H_1) \text{ch}(\beta_n) \right]} \quad (8.16)$$

Etudions maintenant le système tricouche schématisé sur la figure 8.3.

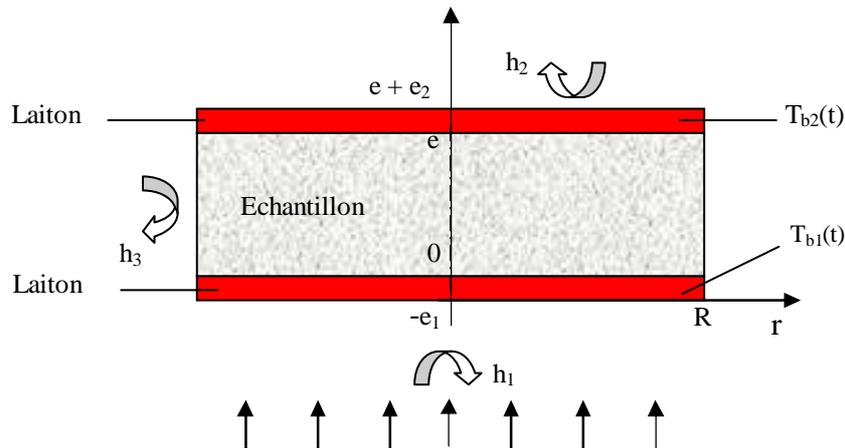


Figure 8.3: Schéma de l'expérimentation avec un tricouche

Les équations (8.1), (8.4), (8.55) et (8.66) restent valables pour l'échantillon.

Le bilan thermique local au rayon r sur le disque de lait chauffé (supposé à température uniforme) $T_{b1}(t)$ s'écrit :

$$\pi R^2 e_1 \rho_b c_b \frac{\partial T_{b1}}{\partial t} = \Phi_0(t) \pi R^2 - h_1 \pi R^2 T_{b1} - h_3 2\pi R e_1 T_{b1} + \int_0^R 2\pi r dr \lambda_s e \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} \quad (8.17)$$

L'intégration de ce bilan local entre $r = 0$ et $r = R$ après transformation de Laplace conduit à :

$$-\lambda \frac{\partial \theta_{\text{moy}}(e, p)}{\partial z} = \Phi_0(t) - \left[\rho_b c_b e_1 p + \left(h_1 + \frac{2h_3 e_1}{R} \right) \right] \theta_{b1} \quad (8.18)$$

Cette équation est de la même forme que la relation (8.8) en considérant la température moyenne en z plutôt que la température locale en (r, z) et en remplaçant h_1 par un coefficient corrigé :

$$h_{1c} = \rho_b c_b e_1 p + \left(h_1 + \frac{2h_3 e_1}{R} \right) \quad (8.19)$$

Le bilan thermique sur le disque de laiton non-chauffé conduit de manière analogue à un coefficient corrigé :

$$h_{2c} = \rho_b c_b e_2 p + \left(h_2 + \frac{2h_3 e_2}{R} \right) \quad (8.20)$$

En considérant la température moyenne en z au lieu de la température locale en (r, z) , on obtient les mêmes conditions limites pour un seul milieu. On en déduit que dans le cas du tri-couche laiton-échantillon-laiton, les expressions (8.15) et (8.16) des températures moyennes respectivement en $z = 0$ et $z = e$ pour le milieu simple restent valables à condition de remplacer h_1 par h_{1c} et h_2 par h_{2c} dans les relations.

La fonction de transfert $H(p)$ du système s'écrit :

$$H(p) = \frac{\theta(e, p)}{\theta(0, p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n) + H_2 \operatorname{ch}(\beta_n)} \quad (8.21)$$

$$\text{et permet d'écrire : } T_{b2}(t) = T_{b1}(t) \otimes L^{-1}[H(p)] \quad (8.22)$$

Ces deux dernières relations sont vraies quelque soit la condition limite sur le disque de laiton chauffé, en particulier si le disque de laiton chauffé échange par conduction avec un isolant (tel que décrit sur la figure 8.1) plutôt que par convection avec de l'air.

Le principe de la méthode consiste à estimer la fonction de transfert $H(p)$ en estimant les valeurs des paramètres a , λ et $h = h_2 = h_3$ qui permettent de minimiser la somme des écarts quadratiques entre les valeurs de $T_{b2}(t)$ expérimentales et celles calculées par la relation (8.22) à partir des valeurs expérimentales de $T_{b1}(t)$. La méthode de minimisation utilisée est celle de Levenberg-Marquart.

Un des intérêts de la méthode est de ne pas être sensible aux transferts de chaleur sur la face chauffée ; dans le cas d'un transfert convectif et compte-tenu des variations temporelles importantes de la température sur cette face, l'hypothèse d'un coefficient de convection constant et surtout égal à celui de la face non-chauffée n'est pas complètement vérifiée. On montrera que ce biais de modèle peut induire des erreurs sur l'estimation des paramètres en particulier dans le cas de mesure effectuée sur un isolant où la température de la face chauffée peut atteindre rapidement des valeurs de plusieurs dizaines de degrés et où la résistance au transfert externe (convection) est du même ordre de grandeur que la résistance au transfert interne (conduction).

Par rapport aux limites (décrites en introduction) des méthodes par contact et de la méthode flash pour la mesure de la conductivité thermique des isolants légers, la méthode proposée présente les avantages suivants :

- Les mesures de température effectuées sur un métal bon conducteur sont précises,
- La capacité thermique des deux disques (homogènes) est connue avec précision et prise en compte de manière exacte dans le modèle,
- Les transferts de chaleur longitudinaux dans les disques sont intégrés dans le modèle (condition limite de température uniforme).

8.4 Etude de sensibilité

Les sensibilités réduites de la fonction de transfert $H(p)$ ont été calculées pour un système tricouche de caractéristiques suivantes :

Disques de laiton :	$e_b = 0,4\text{mm}$, $D = 40\text{ mm}$, $\lambda = 100,4\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $a = 3,14.10^{-7}\text{ m}^2.\text{s}^{-1}$;
Echantillons :	
Super-isolant :	$\lambda = 0,02\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $a = 4.10^{-6}\text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $e = 5\text{mm}$ et $e = 10\text{mm}$
Polystyrène :	$\lambda = 0,035\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $a = 8.10^{-7}\text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $e = 10\text{mm}$
Béton cellulaire :	$\lambda = 0,15\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $a = 5.10^{-7}\text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $e = 10\text{mm}$

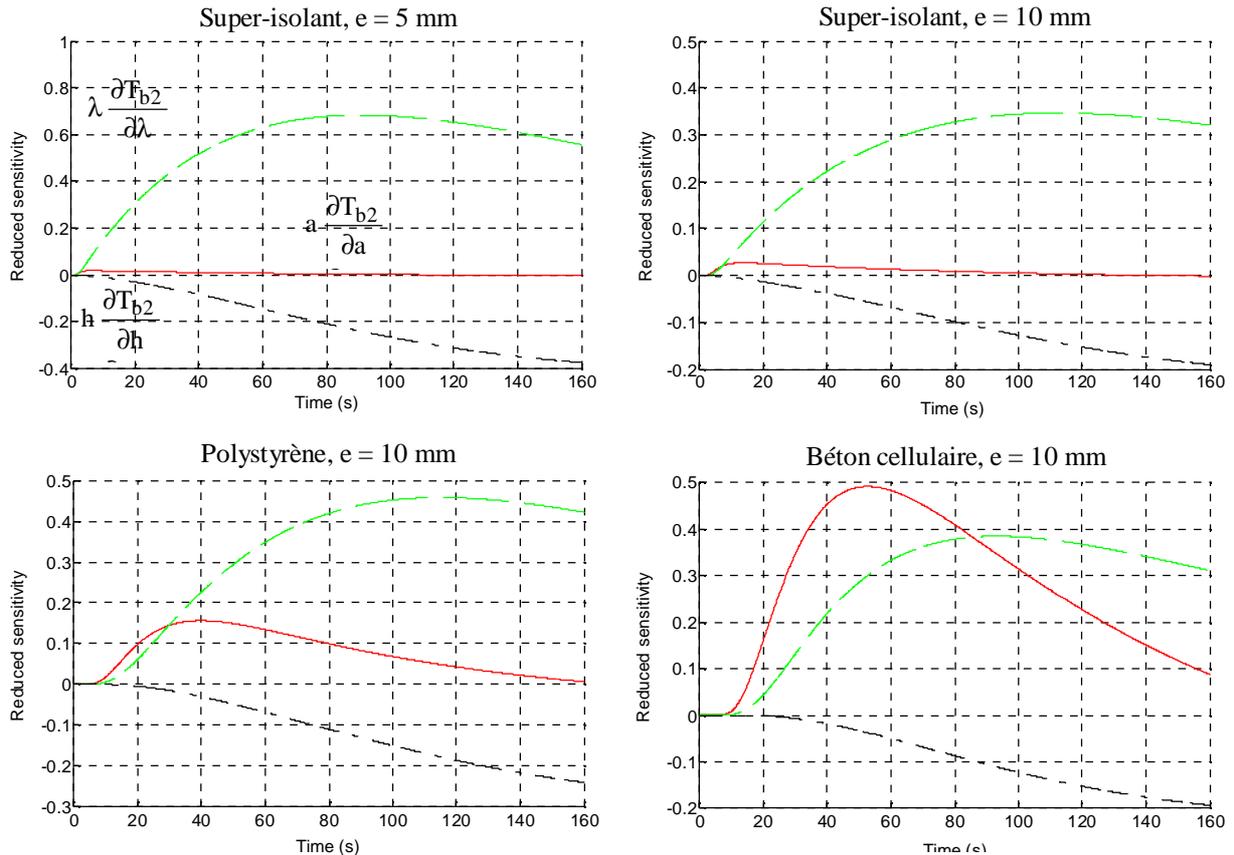


Figure 8.4 : Courbes de sensibilité réduite de la fonction de transfert $H(p)$ calculée par la relation (25)

On remarque que :

- Pour un même matériau, la sensibilité à la diffusivité thermique augmente avec l'épaisseur de l'échantillon et celle à la conductivité thermique diminue
- Pour une même épaisseur, la sensibilité à la diffusivité thermique augmente avec la capacité thermique de l'échantillon
- La sensibilité à la diffusivité thermique est très faible pour les matériaux très légers et ne sera pas mesurable par cette méthode pour ce type de matériaux ; elle est par contre suffisante pour estimer la diffusivité thermique d'isolants moins légers comme le polystyrène ou le béton cellulaire
- La sensibilité à la conductivité thermique est élevée dans tous les cas et décorrélée des sensibilités au coefficient de convection et à la diffusivité thermique, la conductivité est donc a priori estimable par cette méthode pour tous les types d'isolants.

8.5 Limites de la méthode

Des mesures ont été réalisées sur 2 matériaux : une mousse rigide d'épaisseur 10,0mm et du béton cellulaire d'épaisseur 8,1mm. Les conductivités des ces deux matériaux ont été mesurées par ailleurs par la méthode de la mini-plaque chaude (Jannot et al 2008). La méthode du plan chaud (Zhang et Degiovanni 1993) a également permis de mesurer l'effusivité thermique du béton cellulaire.

Une série de 3 essais a été menée sur chaque échantillon de diamètre 40mm. On trouvera sur la figure 8.5 un exemple de courbes expérimentales $T_{b1}(t)$ et $T_{b2}(t)$ obtenues sur l'isolant rigide. La figure 8.6 représente les courbes expérimentales et simulées avec les valeurs obtenues après estimation de la face non-chauffée ainsi que les résidus (multipliés par 10). On note un très faible écart entre les deux courbes.

La méthode proposée repose sur un dispositif tricouche dont on détermine la fonction de transfert par méthode inverse appliquée à un produit de convolution après avoir mesuré les températures en entrée et en sortie. Cette méthode permet de mesurer avec une précision satisfaisante (<5%) la conductivité thermique des isolants et des super-isolants ($\lambda < 0,15W.m^{-1}.K^{-1}$). Elle permet également de mesurer la diffusivité thermique des matériaux

dont la capacité calorifique est supérieure à 4.10^4 W.m^{-3} . La capacité calorifique des matériaux super-isolants très légers paraît toutefois très difficile à mesurer par cette méthode.

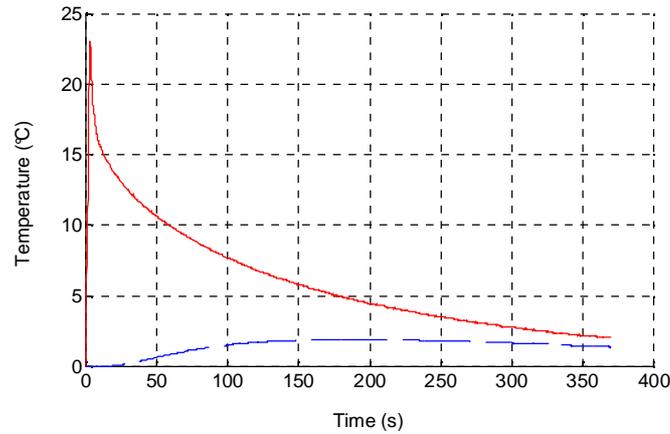


Figure 8.5 : Courbes expérimentales $T_{b1}(t)$ et $T_{b2}(t)$ sur mousse rigide

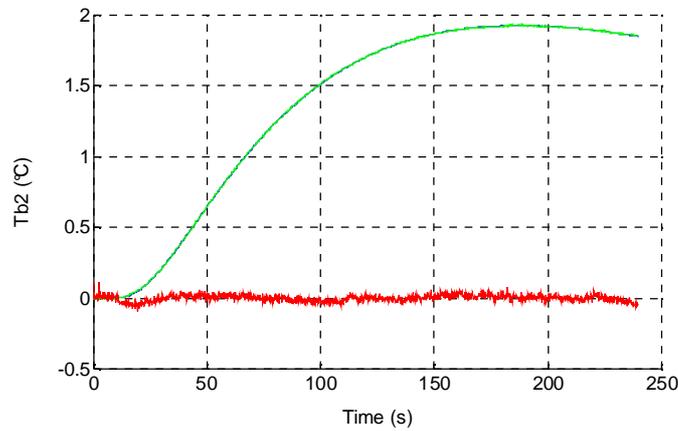


Figure 8.6 : Courbes expérimentale et simulée $T_{b2}(t)$ sur mousse rigide et résidus $\times 10$

9 METHODES DE TYPE PLAN CHAUD

9.1 Méthode du plan chaud semi-infini

9.1.1 Principe de la méthode

On applique un échelon de flux de chaleur constant ($\phi = 0$ si $t < t_0$ et $\phi = \phi_0$ si $t > t_0$) à la résistance chauffante et on relève l'évolution de la température $T_s(t)$ au centre de cette même résistance dans ou sur laquelle a été placé un thermocouple. Pendant le temps où la perturbation n'a pas atteint les autres faces c'est-à-dire où l'hypothèse du milieu semi-infini est valide (temps pendant lequel $T_c(t)$ n'a pas varié), on peut considérer que le transfert au centre de l'échantillon est unidirectionnel. La modélisation de ce transfert de chaleur permet de calculer l'évolution de la température au centre de l'échantillon. On applique une méthode d'estimation de paramètres pour calculer les valeurs de :

- L'effusivité thermique $E = \sqrt{\lambda \rho c}$,
- La capacité thermique $(mc)_s$ de l'ensemble sonde + résistance chauffante,
- La résistance de contact R_c à l'interface sonde/échantillon,

qui minimisent l'écart entre les courbes $T_s(t)$ théoriques et expérimentales.

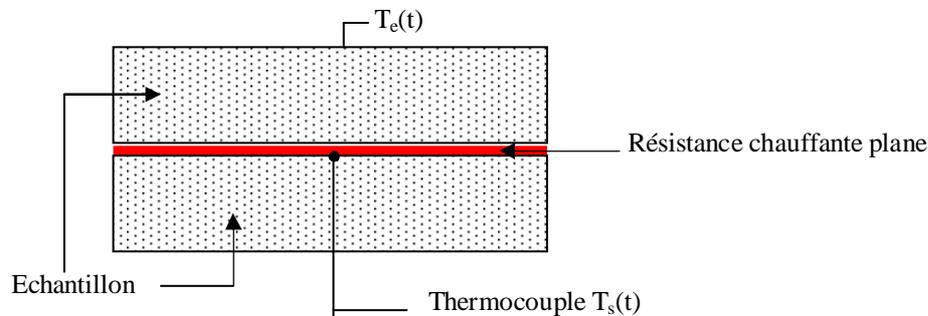


Figure 9.1 : Schéma du montage de la méthode du plan chaud.

9.1.2 Modélisation du plan chaud semi-infini

Considérons maintenant le dispositif du plan chaud où une résistance électrique de faible épaisseur, de masse m_s , de capacité calorifique c_s , soumise à une densité de flux de chaleur ϕ et de température supposée uniforme T_s est placée entre deux échantillons du matériau à caractériser (cf. figure 9.2) :

L'équation de la chaleur s'écrit dans l'échantillon :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9.1)$$

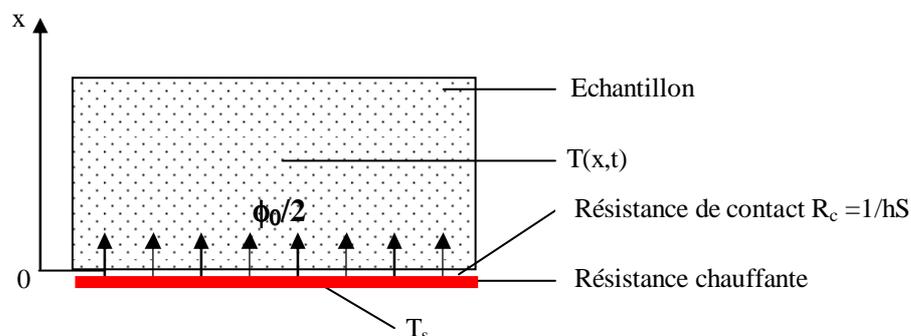


Figure 9.2 : Schématisation d'un plan chaud et notations.

$$\text{avec les conditions aux limites : } \begin{cases} T(x, 0) = T_s(0) = T_i & (9.2) \\ T(\infty, t) = T_i & (9.3) \\ h [T_s(t) - T(0, t)] = -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} & (9.4) \\ \frac{\phi_0 S}{2} = m_s c_s \frac{dT_s}{dt} + h S [T_s(t) - T(0, t)] & (9.5) \end{cases}$$

La relation (9.4) traduit la conservation du flux de chaleur au niveau de la surface du milieu semi-infini et la relation (9.5) traduit la conservation du flux de chaleur au niveau de la résistance électrique.

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

$$\text{d'où : } \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{L'équation (a) peut alors s'écrire : } \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad (9.6)$$

$$\text{Et les conditions aux limites deviennent } \begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (9.7) \\ \bar{T}(\infty, t) = 0 & (9.8) \\ h [\bar{T}_s(t) - \bar{T}(0, t)] = -\lambda \frac{\partial \bar{T}(0, t)}{\partial x} & (9.9) \\ \frac{\phi_0 S}{2} = \frac{m_s c_s}{2} \frac{d\bar{T}_s}{dt} + h S [\bar{T}_s(t) - \bar{T}(0, t)] & (9.10) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x, 0)] = 0$ avec $\bar{T}(x, 0) = 0$

D'où : $\theta(x, p) = A e^{-qx} + B e^{+qx}$, la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc $B = 0$, et nous en déduisons que $\theta(x, p) = A e^{-qx}$ avec $A = \theta(0, p)$.

Les transformées de Laplace des équations (d) et (e) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} h [\theta_s(p) - \theta(0, p)] = -\lambda \frac{\partial \theta(0, p)}{\partial x} = \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \theta(0, p) = E \sqrt{p} \theta(0, p) \end{array} \right. \quad (9.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_0 S}{2 p} = \frac{m_s c_s}{2} p \theta_s(p) + h S [\theta_s(p) - \theta(0, p)] \end{array} \right. \quad (9.12)$$

En éliminant $\theta(0, p)$ entre ces deux équations, on aboutit au résultat suivant :

$$\boxed{\theta_s(p) = \frac{\phi_0 S}{2 p} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{\frac{m_s c_s}{2} p + \left[R_c \frac{m_s c_s}{2} p + 1 \right] E S \sqrt{p}} \quad (9.13)}$$

où : θ_s Transformée de Laplace de la température T_s de la résistance chauffante
 R_c Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / échantillon
 m_s Masse thermocouple + résistance chauffante
 c_s Capacité calorifique thermocouple + résistance chauffante
 E Effusivité thermique de l'échantillon
 p Variable de Laplace
 S Surface de la résistance chauffante
 ϕ_0 Densité de flux dissipée dans la résistance chauffante

Les paramètres inconnus à déterminer expérimentalement sont :

- L'effusivité E de l'échantillon,
- La résistance thermique de contact R_c entre la sonde et l'échantillon,
- La capacitance thermique $(mc)_s$ de la sonde.

9.1.3 Estimation des paramètres

Choix de l'intervalle de temps pour l'estimation

L'estimation de paramètres à partir de mesures effectuées en régime transitoire repose sur la minimisation des écarts quadratiques entre une courbe expérimentale et une courbe théorique obtenue par simulation d'un modèle reposant sur un certain nombre d'hypothèses. Il est primordial de s'assurer ces hypothèses sont vérifiées sur l'intervalle de temps choisi pour l'estimation des paramètres. Cela n'est malheureusement pas toujours le cas dans certains travaux publiés et cela conduit alors à des valeurs estimées pour le moins imprécises.

Dans le cas présent du plan chaud semi-infini, le problème consiste à connaître le temps t de chauffage pendant lequel l'hypothèse du milieu semi-infini est valide.

Une première méthode consiste à calculer l'évolution de la température $T_e(t)$ à une distance égale à l'épaisseur de l'échantillon à l'aide des paramètres estimés sur un temps t arbitraire. Si la température $T_e(t)$ calculée diffère de la température initiale $T_e(0)$ de plus de $0,1^\circ\text{C}$ on reprend le calcul d'estimation des paramètres sur un temps plus court. Etant donné que l'on cherche simplement à estimer le temps pendant lequel le milieu reste semi-infini, on peut se contenter de le faire dans le cas simple (et le plus défavorable) où la résistance de contact et la capacitance thermique de l'ensemble sonde + résistance chauffante sont nulles. La température dans le milieu semi-infini à une distance e de la surface chauffée s'écrit alors :

$$T_e(t) = T_e(0) + \frac{2\phi_0}{\lambda} \sqrt{at} \operatorname{ierfc}\left(\frac{e}{2\sqrt{at}}\right) \quad (9.14)$$

Où : $\operatorname{ierfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u [1 - \operatorname{erf}(u)]$

Cette méthode d'estimation présente toutefois l'inconvénient majeur suivant : il faut connaître la valeur de la diffusivité thermique pour estimer le temps pendant lequel l'hypothèse du milieu semi-infini reste valable.

Une deuxième méthode plus simple à utiliser mais nécessitant une certaine pratique est l'analyse des résidus, à savoir des différences entre les valeurs expérimentales de la température et les valeurs calculées à partir du modèle avec les paramètres estimés. Les résidus doivent être « plats » (centrés sur 0) tout le temps que les hypothèses d'établissement du modèle sont vérifiées, une dérive des résidus à partir d'un certain temps est le signe que l'une des hypothèses du modèle n'est plus vérifiée. On restreindra alors a posteriori l'intervalle d'estimation à la zone sur laquelle les résidus sont « plats ». Cette méthode est générale et peut être appliquée à toutes les méthodes de mesure en régime transitoire.

Une troisième méthode consiste à vérifier expérimentalement les hypothèses. Dans le cas du plan chaud infini on peut par exemple placer un thermocouple sur la face non chauffée de l'échantillon.

Estimation simplifiée aux temps longs

La température au centre s'écrit dans l'espace de Laplace :

$$\theta_s(p) = \frac{\phi_0 S}{2p} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{\frac{m_s c_s}{2} p + \left[R_c \frac{m_s c_s}{2} p + 1 \right] E S \sqrt{p}} \quad (9.15)$$

Aux temps longs ($p \rightarrow 0$), cette expression devient :

$$\theta_s(p) = \frac{\phi_0 S}{2p} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{\left(\frac{mc}{2}\right)_s p + E S \sqrt{p}} = \frac{\phi_0}{2 E p^{3/2}} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{1 + \frac{(mc)_s}{2 E S} \sqrt{p}} = \frac{\phi_0}{2 E p^{3/2}} \left(1 + R_c E S \sqrt{p}\right) \left[1 - \frac{(mc)_s}{2 E S} \sqrt{p}\right] \quad (9.16)$$

$$\text{soit : } \theta_s(p) = \frac{\phi_0}{2 E p^{3/2}} \left[1 + \left(R_c E S - \frac{(mc)_s}{2 E S} \right) \sqrt{p} \right] = \frac{\phi_0}{2 E p^{3/2}} + \frac{\phi_0}{2 p} \left(R_c - \frac{(mc)_s}{2 (E S)^2} \right) \quad (9.17)$$

$$\text{d'où : } \boxed{T_s(t) - T_s(0) = \phi_0 S \left[R_c - \frac{(mc)_s}{2 (E S)^2} \right] + \frac{\phi_0}{E \sqrt{\pi}} \sqrt{t}} \quad (9.18)$$

Le tracé de $T_s(t) - T_s(0)$ en fonction de \sqrt{t} est donc une droite de pente $\frac{\phi_0}{E \sqrt{\pi}}$ dont la détermination permet de calculer l'effusivité thermique E . L'inertie de la sonde et la résistance de contact n'influent pas sur la température aux temps longs. Pour appliquer cette méthode d'estimation, il faut s'assurer que l'hypothèse du milieu semi-infini reste valable sur l'intervalle d'estimation choisi.

Estimation à partir du modèle complet

La température $T(t)$ peut se calculer en appliquant la méthode Stehfest à la relation (9.13). On peut alors utiliser la méthode de Newton pour estimer les valeurs des paramètres E , R_c et mc qui minimisent la somme des écarts quadratiques entre la courbe théorique et les points expérimentaux. Cette méthode d'estimation plus précise que la méthode d'estimation aux temps longs.

On trouvera sur la figure (9.3) un exemple de thermogramme expérimental obtenu avec du PVC d'épaisseur 0,5cm. On constate qu'entre 5 et 60s, la courbe représentant $T_0(t) - T_0(0)$ en fonction de \sqrt{t} est assimilable à une droite dont on obtient la pente par régression linéaire : $\alpha = 0,671^\circ\text{C}\cdot\text{s}^{-1/2}$. La surface de la sonde étant de 0,00243 m², sa résistance de 231,7Ω et la tension d'alimentation 19V, on en déduit par application de la formule (9.18) la valeur de l'effusivité thermique : $E = 526,6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}\cdot\text{s}^{-1/2}$.

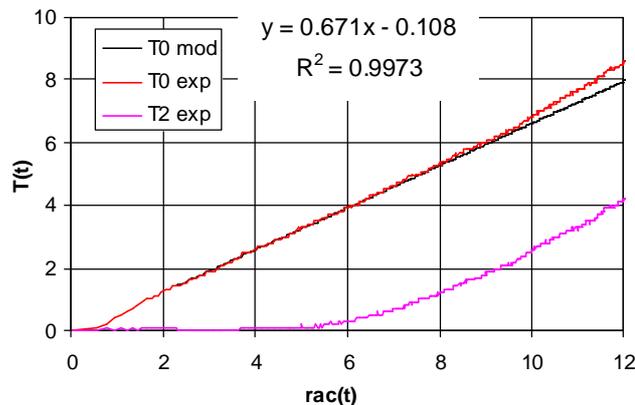


Figure 9.3 : Courbes expérimentales $T_0(t)$ et $T_2(t)$ et régression linéaire de la courbe $T_0(t)$ entre 5 et 50s.

On peut remarquer sur ce thermogramme que le temps pendant lequel le modèle plan chaud s'applique (≈ 60 s) est nettement supérieur au temps au bout duquel la température $T_2(t)$ de la face non chauffée de l'échantillon commence à varier (≈ 30 s).

Une valeur plus précise peut ensuite être estimée entre 0 et 60s de la manière suivante :

- On fixe des valeurs de départ des paramètres E (estimé par utilisation de la relation 9.3), R_{c1} et mc .
- On utilise dans un tableur la méthode de Stehfest d'inversion de la transformée de Laplace pour calculer la différence $T_0(t) - T_0(0)$ à partir de la formule (9.13).

On utilise le solveur du tableur (utilisant la méthode de Newton) pour déterminer la valeur des paramètres E , R_{c1} et mc qui minimisent l'écart entre la courbe expérimentale et la courbe calculée par inversion de (9.1).

On trouve dans le cas de l'exemple étudié : $E = 540,8 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}\cdot\text{s}^{-1/2}$, $R_{c1} = 2,5\cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{m}^2\cdot\text{W}^{-1}$, $mc = 0,90 \text{ J}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$.

On observe une très bonne concordance entre la courbe expérimentale (« $T_0 \text{ exp.}$ ») et la courbe théorique (« $T_0 \text{ mod. semi-infini}$ ») sur tout l'intervalle de temps $[0, 60\text{s}]$ ainsi que le montre la figure 9.4. La divergence des 2 courbes au-delà de 60s indique que l'hypothèse du milieu semi-infini n'est plus valable après 60s et qu'il faut alors appliquer le modèle complet.

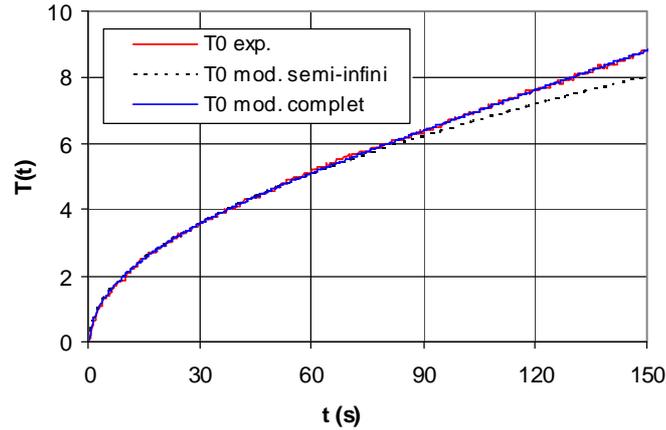


Figure 9.4 : Courbe $T_0(t)$ expérimentale et courbes simulées par les modèles semi-infini et complet.

9.1.4 Réalisation pratique de la mesure

Cette méthode peut être mise en œuvre de manière extrêmement simple en utilisant une résistance chauffante plate (rectangulaire ou circulaire) de surface suffisante (au moins 25 cm^2). On « scotche » au centre de cette résistance un thermocouple réalisé en fils fins (diamètre $< 0,2 \text{ mm}$) : les deux fils séparés du thermocouple sont posés sur la résistance à une distance d'environ 5 mm puis recouvert d'un film adhésif en aluminium qui assurera à la fois un bon contact entre le thermocouple et la résistance, le contact électrique entre les deux fils du thermocouple (dit dans ce cas à contacts séparés) et une homogénéisation de la température au voisinage du thermocouple.

Ce montage relativement « rustique » permet d'évaluer avec une bonne précision la valeur de l'effusivité thermique E . La principale source d'incertitude est la valeur de la densité de flux de chaleur ϕ_0 , la mesure de la puissance électrique est précise, mais il faut utiliser une surface de chauffe suffisante pour diminuer l'incertitude sur S .

La mise en œuvre de la méthode nécessite en outre une alimentation stabilisée et un dispositif d'enregistrement de la tension délivrée aux bornes du thermocouple. Un enregistrement d'une durée de 60 secondes après le début du chauffage permet d'obtenir une bonne précision sur l'effusivité thermique E .

9.1.5 Montage asymétrique

Le montage étudié jusqu'alors et représenté sur la figure 9.2 est un montage symétrique qui conduit à une simplification de la modélisation et des calculs. Il présente toutefois pour certains matériaux deux inconvénients :

- Si les matériaux sont durs, la présence des fils de thermocouple entre la sonde chauffante et la surface du matériau va imposer une distance minimale (égale au diamètre des fils) entre les deux et provoquer une résistance de contact assez importante et asymétrique.
- Pour certains cas particuliers, il peut être difficile de réaliser deux échantillons de propriétés et d'état de surface identiques, c'est en particulier le cas de certains matériaux de construction dont on veut mesurer les propriétés à une teneur en eau donnée.

Une solution pour remédier à ces deux inconvénients est d'utiliser un montage asymétrique dans lequel l'un des échantillons est remplacé par un isolant d'effusivité thermique E_i connue (cf. figure 9.5). On utilise par exemple de la mousse de polyuréthane en plaçant le thermocouple sur la face de la sonde en contact avec la mousse. Le caractère déformable de la mousse va permettre au thermocouple de s'y insérer et de ne pas créer de résistance de contact R_{ci} importante. De plus cette résistance de contact a une importance beaucoup plus faible si elle est du côté d'un matériau isolant.

Toute l'analyse développée sur le plan chaud symétrique reste applicable moyennant ces modifications :

- La relation (9.13) doit être remplacée par la relation suivante :

$$\theta_s(p) = \frac{\phi_0}{p} \frac{1}{\frac{m_s c_s p + [R_c m_s c_s p + 1] E S \sqrt{p}}{1 + R_c E S \sqrt{p}} + \frac{E_i S \sqrt{p}}{1 + R_{ci} E_i S \sqrt{p}}} \quad (9.19)$$

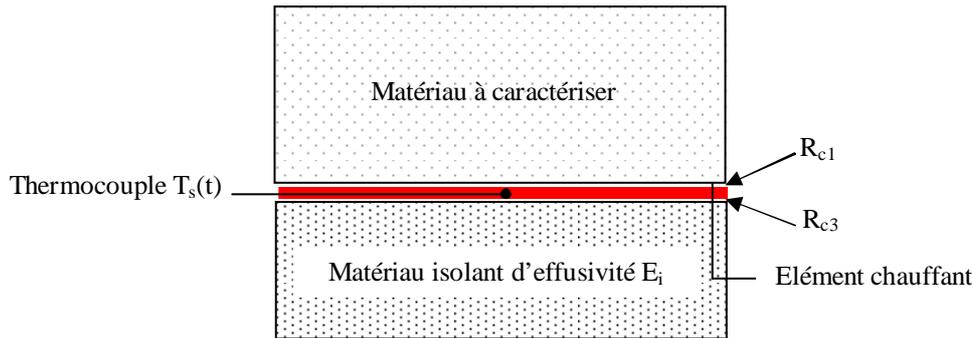


Figure 9.5 : Schéma du montage de la méthode du plan chaud avec un échantillon semi-infini.

avec :	θ_s	Transformée de Laplace de l'élévation de température de la sonde
	R_c	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / matériau à caractériser
	R_{ci}	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / matériau connu
	m	Masse thermocouple + résistance chauffante
	c	Capacité calorifique thermocouple + résistance chauffante
	E	Effusivité thermique du matériau à caractériser
	E_i	Effusivité thermique du matériau isolant connu
	p	Variable de Laplace
	S	Surface de la résistance chauffante
	ϕ_0	Puissance dissipée dans la résistance chauffante

- La relation approchée (9.18) valable aux temps longs doit être remplacée par la relation suivante :

$$T_s(t) - T_s(0) = \phi_0 S \left[\frac{R_c E^2 + R_{ci} E_i^2}{(E + E_i)^2} - \frac{2(m c)_s}{[(E + E_i)S]^2} \right] + \frac{2 \phi_0}{(E + E_i) \sqrt{\pi}} \sqrt{t} \quad (9.20)$$

Le tracé de $T_s(t) - T_s(0)$ en fonction de \sqrt{t} est donc une droite de pente $\frac{2 \phi_0}{(E + E_i) \sqrt{\pi}}$ dont la détermination permet de calculer l'effusivité thermique E de l'échantillon connaissant l'effusivité thermique E_i de l'isolant.

9.1.6 Limites de la méthode

Les limites de la méthode sont principalement liées à l'hypothèse du milieu semi-infini et du transfert 1D. Il a été montré pour le plan chaud symétrique (Bal, 2011) que dans le cas le plus favorable où la sonde et l'échantillon ont la même surface, la borne supérieure de l'intervalle d'estimation doit être plus petite que les deux valeurs suivantes :

$$\text{Limite du milieu semi-infini} \quad t_1 = \left(\frac{1 + 0,04 E}{-1,5 + 0,2 E} \right) \frac{f^2}{a} \quad (9.21)$$

$$\text{Limite du transfert 1D} \quad t_2 = \left(2 \cdot 10^{-5} E + 0,0669 \right) \frac{b^2}{a} \quad (9.22)$$

où :	a	diffusivité thermique
	b	largeur de la sonde
	e	épaisseur de l'échantillon
	E	effusivité thermique

La méthode du plan chaud sera donc difficile à mettre en œuvre pour les matériaux très diffusifs pour lesquels les temps t_1 et t_2 vont être très faibles. Par ailleurs elle n'est pas non plus très adaptée aux matériaux très légers pour lesquels la température reste sensible à l'inertie thermique de la sonde pendant plusieurs dizaines de secondes. La méthode reposant sur la mesure de la pente de la courbe $T(t) = f(\sqrt{t})$ ne peut donc s'appliquer

qu'au bout d'un temps assez long pour lequel il est alors possible que l'hypothèse du milieu semi-infini ne soit plus vérifiée. Le modèle complet ne tient par ailleurs pas parfaitement compte des transferts dans la sonde considérée comme un corps à température uniforme ce qui reste une approximation commode.

9.2 Méthode du plan chaud fini avec $T_{\text{arrière}}$ constante

9.2.1 Principe de la mesure

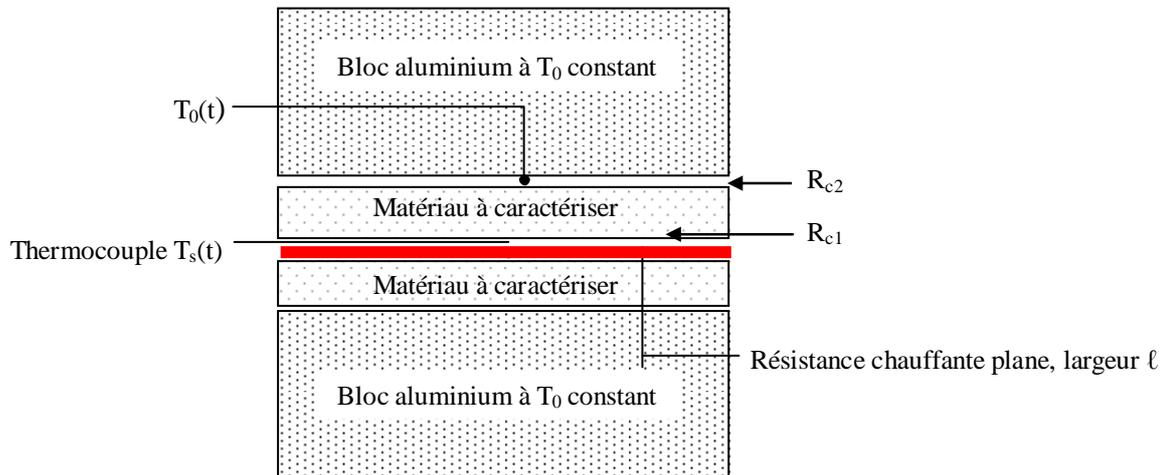


Figure 9.6 : Schéma du montage de la méthode du plan chaud avec deux échantillons.

Le dispositif expérimental schématisé sur la figure 9.6 comprend :

- Un élément chauffant plan de faible épaisseur sur lequel est fixé un thermocouple de type K (diamètre des fils 0,08mm) inséré entre deux échantillons de dimensions identiques du matériau à caractériser.
- Deux blocs isothermes en aluminium d'épaisseur 4cm de section identique à celle des échantillons.
- Un dispositif de serrage permettant de contrôler la pression de serrage et l'épaisseur du dispositif inséré entre les blocs d'aluminium.

L'élément chauffant est soumis à un échelon de flux et l'on enregistre les températures $T_s(t)$ au centre de l'élément chauffant et $T_0(t)$ des blocs d'aluminium. L'exploitation de l'enregistrement de $T_s(t)$ réalisée sur un intervalle de temps pendant lequel le transfert au centre de l'élément chauffant est 1D. Une modélisation 3D permet de définir cet intervalle de temps, un modèle simplifié 1D est ensuite utilisé pour réaliser une estimation des paramètres sur cet intervalle de temps.

9.2.2 Modélisation

Le système sera modélisé dans un premier temps en supposant que la masse des blocs d'aluminium est suffisante pour que T_0 reste constante pendant la durée de l'expérience.

Hypothèses :

- Echantillon de largeur $2b$ et de longueur $2c$, d'épaisseur d
- Élément chauffant d'épaisseur 2^e_s , de largeur $2b$, de longueur $2c$, de masse volumique ρ_s et de capacité calorifique cs_h
- Résistance thermique de l'élément chauffant négligeable (corps mince),
- Résistance de contact R_c entre la sonde et l'échantillon
- Face arrière à température T_0 constante.

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (9.23)$$

La méthode de résolution utilisée est la suivante :

- Transformation de Laplace
- Séparation des variables

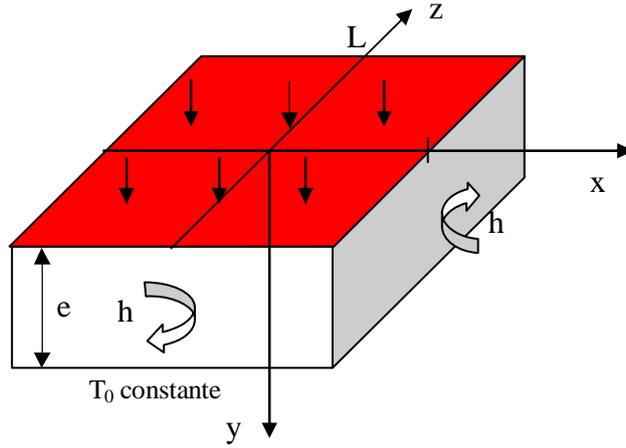


Figure 9.7: Schéma du système modélisé

$$\left. \begin{array}{l} \text{Conditions limites et initiale :} \\ -\lambda_1 \frac{\partial T(x, 0, z, t)}{\partial y} = \frac{T_s(x, z, t) - T(x, 0, z, t)}{Rc} \quad (9.24) \\ T(x, e, z, t) = 0 \quad (9.25) \\ \frac{\partial T(0, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (9.26) \\ \frac{\partial T(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0 \quad (9.27) \\ -\lambda_1 \frac{\partial T(\ell, y, z, t)}{\partial x} = h[T(\ell, y, z, t) - T_i] \quad (9.28) \\ -\lambda_1 \frac{\partial T(x, y, L, t)}{\partial z} = h[T(x, y, L, t) - T_i] \quad (9.29) \\ T(r, z, 0) = T_i \quad (9.30) \\ \phi_0 = \rho_h e_h c_h \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{T_s(x, z, t) - T(x, 0, z, t)}{Rc} \quad (9.31) \end{array} \right\}$$

On pose $\Delta T(r, z, t) = T(r, z, t) - T_0$ et $L[\Delta T(r, z, t)] = \theta(r, z, p)$

La transformée de Laplace de (a) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y, z, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, p)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, p)}{\partial z^2} = \frac{p}{a} \theta(x, y, p) \quad (9.32)$$

On écrit la température après transformation de Laplace sous la forme suivante :

$$\theta(r, z, p) = X(x, p) Y(y, p) Z(z, p)$$

La solution s'écrit :

$$\theta(x, y, z, p) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\Phi_0(p) \frac{\sin(\alpha_p \ell)}{\alpha_p} \frac{\sin(\delta_q L)}{\delta_q} \cos(\alpha_p x) \cos(\delta_q y) \sinh[\gamma_{pq}(e-z)]}{G_{pq} \left[\frac{\sin(2\alpha_p \ell)}{4\alpha_p} + \frac{\ell}{2} \right] \left[\frac{\sin(2\delta_q L)}{4\delta_q} + \frac{L}{2} \right]} \quad (9.33)$$

Et au centre de la face chauffée :

$$\theta(0, 0, 0, p) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\Phi_0(p) \frac{\sin(\alpha_p \ell)}{\alpha_p} \frac{\sin(\delta_q L)}{\delta_q} \cosh(\gamma_{pq} e)}{G_{pq} \left[\frac{\sin(2\alpha_p \ell)}{4\alpha_p} + \frac{\ell}{2} \right] \left[\frac{\sin(2\delta_q L)}{4\delta_q} + \frac{L}{2} \right]} \quad (9.34)$$

$$\text{avec : } G_{pq} = [\lambda_1 \gamma_{pq} (1 + Rc \rho_h c_h e_h p) \sinh(\gamma_{pq} e) + \rho_h c_h e_h p \cosh(\gamma_{pq} e)] \quad (9.35)$$

Les valeurs propres α_p sont solutions de l'équation transcendante :

$$\alpha \ell \tan(\alpha \ell) = H_x, \text{ avec : } H_x = \frac{h \ell}{\lambda_1} \quad (9.36)$$

Les valeurs propres δ_n sont solutions de l'équation transcendante :

$$\delta L \tan(\delta L) = H_z, \text{ avec : } H_z = \frac{h L}{\lambda_1} \quad (9.37)$$

$$\gamma_{pq}^2 = \frac{p}{a_1} + \alpha_p^2 + \delta_q^2$$

$$\text{Pour un échelon de flux : } \Phi_0(p) = \frac{\phi_0}{p}$$

9.2.3 Modèles simplifiés 1D

Hypothèses :

- Les résistances de contact et la résistance thermique de l'élément chauffant sont négligeables devant la résistance de l'échantillon.
- Le transfert est 1D au centre du système pendant la durée de l'expérience.
- Le gradient de température suivant Oz est nul dans l'élément chauffant (mince).
- La température $T_0(t)$ reste constante

Une sonde d'épaisseur maximale $2e_s = 0,3\text{mm}$ et de conductivité thermique de l'ordre de $0,15\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ présente une résistance thermique $\frac{e_s}{\lambda_s} = 10^{-3} \text{ m}^2\cdot\text{K}\cdot\text{W}^{-2}$. Pour satisfaire à la première hypothèse, on ne considérera que les cas où $\frac{e}{\lambda} \gg 10^{-3} \text{ m}^2\cdot\text{K}\cdot\text{W}^{-2}$.

Une modélisation quadripolaire 1D du système permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_s \\ \frac{\Phi_0}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_s p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (9.38)$$

$$\text{où : } A = D = \cosh\left(\sqrt{\frac{p}{a}} e\right); \quad B = \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{p}{a}} e\right)}{\lambda S \sqrt{\frac{p}{a}}}; \quad C = \lambda S \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh\left(\sqrt{\frac{p}{a}} e\right);$$

θ_s	Transformée de Laplace de la différence $T_s(t) - T_0(t)$
ρ_s	Masse volumique de la sonde chauffante
c_s	Capacité calorifique massique de la sonde chauffante
λ	Conductivité thermique du matériau à caractériser
a	Diffusivité thermique du matériau à caractériser
p	Variable de Laplace
S	Surface de l'échantillon et de l'élément chauffant
$C_s = \rho_s c_s e_s S$	

$$\text{Ce qui permet d'écrire : } \theta_s(p) = \Phi_0 \frac{B}{B C_s p + D} \quad (9.39)$$

La température $T_s(t)$ dans l'espace réel est obtenue par transformation de Laplace inverse qui est réalisée par l'algorithme de De Hoog ou par la méthode de Stehfest: $\Delta T(t) = T_s(t) - T_0 = L^{-1}[\theta_s(p)]$

Aux temps très longs on obtient : $T_s(t = \infty) - T_0(t) = \frac{\phi_0}{\frac{\lambda}{e}}$. Cette relation permet d'obtenir de manière très

simple une valeur de la conductivité thermique λ à partir de la valeur de ΔT_{exp} obtenue quand le régime permanent est atteint.

Le principe de la méthode proposée est d'estimer les valeurs des paramètres λ et accessoirement ρc et $\rho_s c_s$ qui minimisent la somme des écarts quadratiques $\Psi = \sum_{i=1}^N [\Delta T_{\text{exp}}(t_i) - \Delta T_{\text{mod}}(t_i)]^2$ entre la courbe expérimentale et la courbe théorique 1D sur un intervalle de temps sur lequel le transfert est 1D au centre de l'élément chauffant. La validité de cette hypothèse a été examinée par des simulations utilisant le modèle 3D ce qui a conduit à l'établissement de l'abaque présentée sur la figure 9.8.

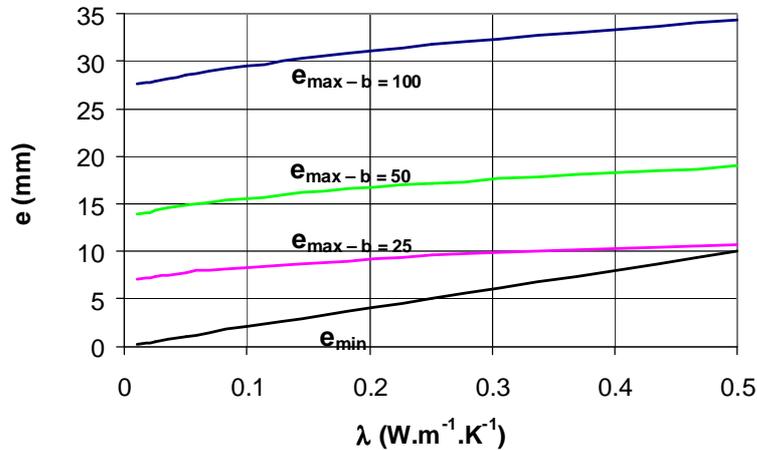


Figure 9.8: Valeurs limites de l'épaisseur d'échantillon pour satisfaire les hypothèses du modèle 1D (élément chauffant carré de côté b)

La minimisation de la somme ψ est réalisée par utilisation de l'algorithme de Levenberg-Marquart. Les écarts types sur les valeurs estimées de λ , ρc et $\rho_s c_s$ (résultant du seul bruit de mesure sur les températures) peuvent être calculés à partir de l'écart type σ_T des différences $T_s(t_i) - T_0(t_i)$ et de la matrice de sensibilité $[X]$ par (Beck et al., 1977) :

$$\sigma_\lambda = \sqrt{a_{11}} \quad ; \quad \sigma_{\rho c} = \sqrt{a_{22}} \quad ; \quad \sigma_{\rho_s c_s} = \sqrt{a_{33}}$$

$$\text{où : } (\sigma_T)^2 [X^t X]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ et : } [X] = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_0}{\partial \lambda}(t_1) & \frac{\partial T_0}{\partial (\rho c)}(t_1) & \frac{\partial T_0}{\partial (\rho_s c_s)}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial T_0}{\partial \lambda}(t_N) & \frac{\partial T_0}{\partial (\rho c)}(t_N) & \frac{\partial T_0}{\partial (\rho_s c_s)}(t_N) \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

9.2.4 Etude de sensibilité

L'étude de sensibilité a été réalisée pour 3 matériaux isolants dont on trouvera les propriétés thermiques dans le tableau 9.1. Nous avons considéré un élément chauffant d'épaisseur 0,25mm et de capacité calorifique $\rho_s c_s = 1,5 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$. Nous avons fait l'hypothèse d'un transfert 1D au centre de l'élément chauffant et calculé pour chaque matériau considéré les sensibilités réduites de la température $T_s(t)$ aux différents paramètres.

L'ensemble des résultats est présenté sur la figure 9.10.

Tableau 9.1 : Caractéristiques des matériaux étudiés

	e	ℓ	L	λ	a	ρc
	m	m	m	$\text{W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
PVC	0,006	0,1	0,1	0,18	$1,21 \cdot 10^{-7}$	$1,52 \cdot 10^6$
Isolant léger	0,01	0,1	0,1	0,040	$5,29 \cdot 10^{-7}$	$8,0 \cdot 10^4$
Super-isolant	0,003	0,1	0,1	0,015	$1,30 \cdot 10^{-7}$	$1,15 \cdot 10^5$

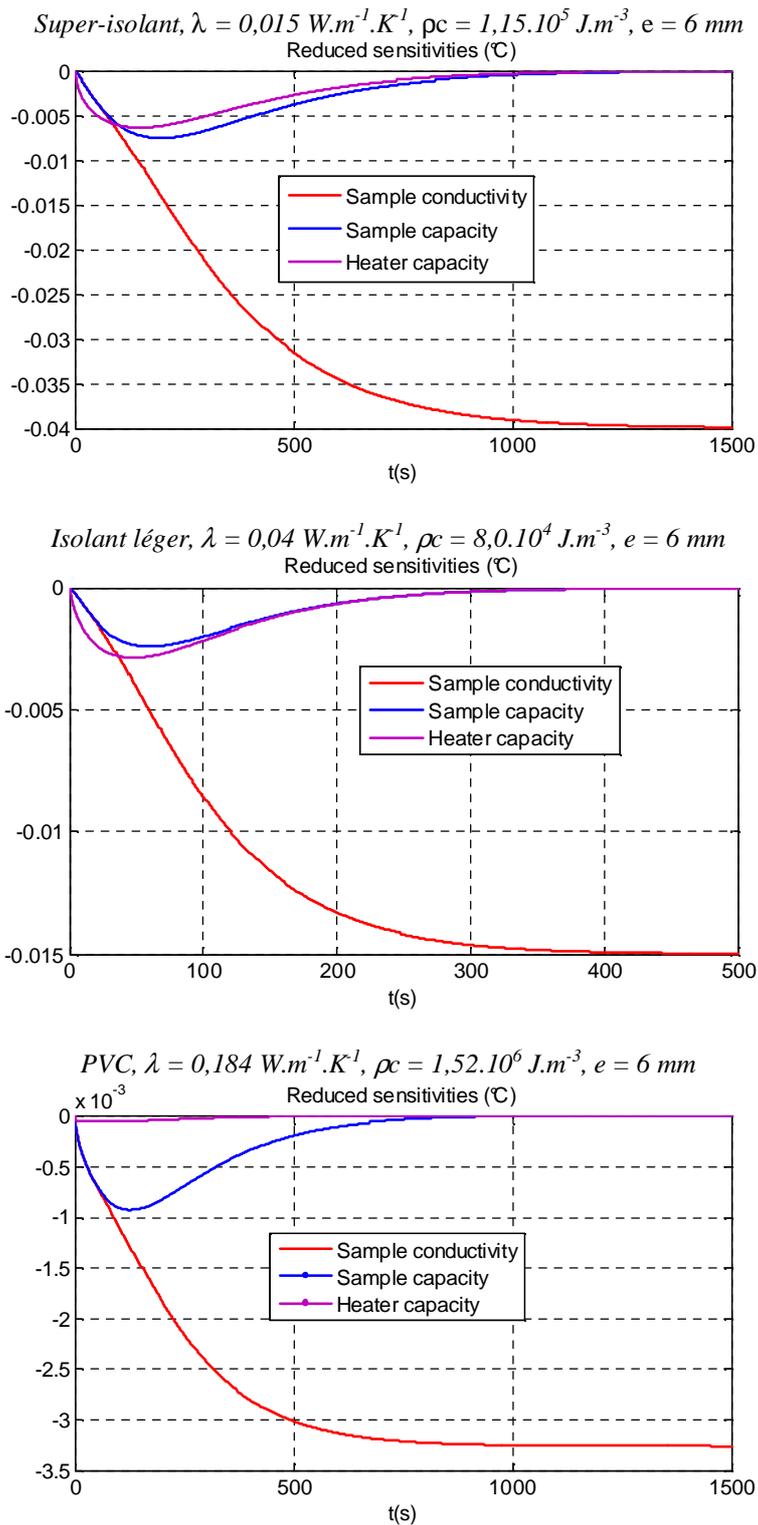


Figure 9.10: Sensibilités réduites de $T_s(0,t)$ pour trois matériaux isolants

On constate que :

- La sensibilité à la conductivité thermique λ est élevée et décorrélée des autres sensibilités.
- La différence de température tend vers une valeur constante.
- La sensibilité à ρc est proportionnelle à la valeur de ρc .

Les sensibilités à $\rho_s c_s$ et à ρc ne sont décorréélées qu'aux temps très courts et seront difficiles à estimer séparément pour les matériaux les plus légers pour lesquels la sensibilité à $\rho_s c_s$ est supérieure à la sensibilité à ρc . Une estimation préalable de la capacité calorifique $\rho_s c_s$ de la sonde est donc conseillée pour ne plus avoir à estimer que les 2 grandeurs λ et ρc pour les matériaux les plus légers.

9.2.5 Limites de la méthode

Cette méthode est très bien adaptée à la mesure d'isolants d'épaisseur modérée. La concordance obtenue entre les courbes expérimentale et théorique est alors très bonne comme le montre la courbe des résidus d'estimation de la figure 9.11. Le rapport épaisseur/largeur devra toujours respecter les limites fixées par l'abaque de la figure pour à la fois s'assurer que le transfert est 1D au centre et que les résistances de contact sont négligeables.

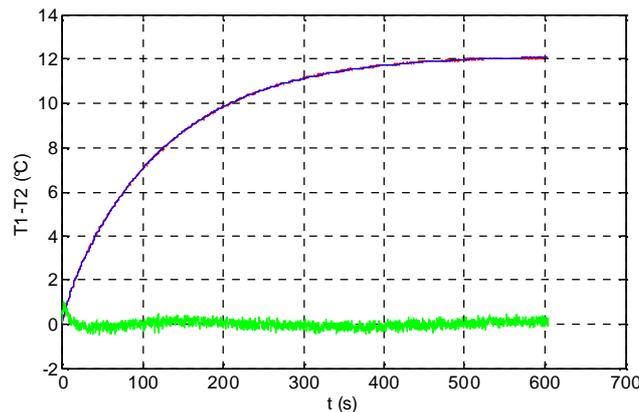


Figure 9.11: Exemple de courbes expérimentale et simulée $T_c(0,t)$ et résidus d'estimation $\times 10$ (—)

Cette méthode peut être mise en oeuvre de manière extrêmement simple en utilisant une résistance chauffante plate (rectangulaire ou circulaire) de surface suffisante (au moins 20 cm^2). On fixe au centre de cette résistance un thermocouple réalisé en fils fins (diamètre $< 0,05 \text{ mm}$).

La configuration avec un seul échantillon permet d'assurer un meilleur contact entre la résistance chauffante et l'échantillon en plaçant le thermocouple sur la face en contact avec l'isolant (polystyrène par exemple). Ce dernier étant déformable, la présence du thermocouple ne modifie pas de façon sensible la résistance de contact qui est de toute façon beaucoup moins influente sur la température du côté de l'isolant. Cette configuration est donc à préférer.

La principale source d'incertitude est la valeur de la surface utile de chauffe S qu'il est préférable d'étalonner à partir de plusieurs mesures réalisées sur des échantillons « étalons » de propriétés thermiques connues. La mesure de la puissance électrique est précise. La mise en oeuvre de la méthode nécessite en outre une alimentation stabilisée et un dispositif d'enregistrement de la tension délivrée aux bornes du thermocouple. L'enregistrement de température sera effectué jusqu'à ce que la différence de température $T_s(t) - T_0(t)$ ne varie plus. On a effet montré que même si la condition $T_0(t)$ constante n'est plus rigoureusement exacte pour des temps très longs, le modèle établi représente alors parfaitement la différence $T_s(t) - T_0(t)$. Un pas de temps de $0,1 \text{ s}$ pour l'enregistrement de la température donne des résultats satisfaisants.

9.3 Méthode du plan chaud asymétrique fini avec face arrière isolée

9.3.1 Principe de la mesure

Cette méthode a été mise au point spécialement pour mesurer les propriétés thermiques de matériaux de construction « lourds » dont la conductivité thermique est comprise entre $0,2$ et $5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (matériaux à base de terre, bétons, bois, plastiques...). Etant donné qu'il peut dans certains cas être difficile d'obtenir deux échantillons de même composition et de même teneur en eau, un montage asymétrique à un seul échantillon a été retenu (cf. figure 9.)

Un élément chauffant plan de faible épaisseur et de même surface ($10 \times 10 \text{ cm}^2$) que l'échantillon est placé entre celui-ci et un échantillon de mousse de polyuréthane. Un thermocouple constitué de deux fils de diamètres inférieur ou égal à $0,05 \text{ mm}$ est collé sur la face de l'élément en contact avec le polyuréthane. Le dispositif est complété par un bloc de polyuréthane placé au-dessus de l'échantillon et le tout est placé entre deux blocs d'aluminium d'épaisseur 4 cm . Un échelon de flux est appliqué à l'élément chauffant et on enregistre l'évolution de la température $T(t)$ du thermocouple. Le thermocouple étant en contact avec un milieu déformable, sa

présence n'engendre pas de résistance de contact supplémentaire. De plus, le polyuréthane étant un isolant, on peut négliger la résistance de contact entre l'élément chauffant et le polyuréthane.

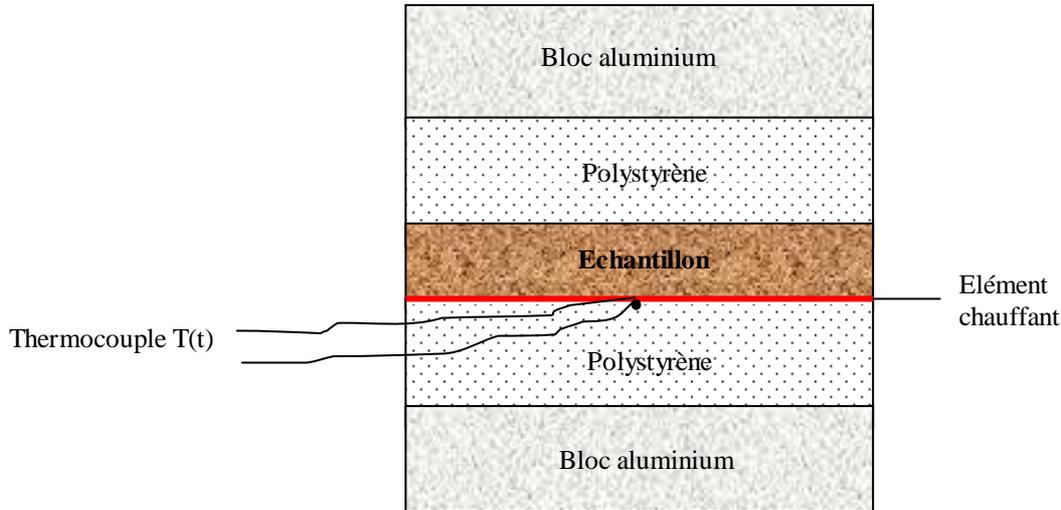


Figure 9.12 : Schéma du dispositif expérimental

On modélise le système en faisant l'hypothèse que le transfert de chaleur reste 1D au centre du dispositif pendant la durée de la mesure. Cette hypothèse est vérifiée ultérieurement par une simulation 3D réalisée avec COMSOL et par analyse des résidus d'estimation qui sont les différences entre la température $T_{\text{mod}}(t)$ obtenue par utilisation du modèle 1D et la température expérimentale $T_{\text{exp}}(t)$.

Avec ces hypothèses, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_h p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Rc \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

$$\text{Avec : } \Phi_0 = \frac{\phi_0}{p} = \Phi_{01} + \Phi_{02} \quad (9.43)$$

- θ Transformée de Laplace de $T(t)$
- Φ_{01} Transformée de Laplace du flux de chaleur dissipé vers l'échantillon
- Φ_{02} Transformée de Laplace du flux de chaleur dissipé vers le polyuréthane
- Φ_0 Transformée de Laplace du flux de chaleur total produit par l'élément chauffant
- ϕ_0 Flux de chaleur total produit par l'élément chauffant
- C_h Capacité thermique de l'élément chauffant par unité de surface : $C_h = \rho_h c_h e_h$
- Rc Résistance de contact entre l'élément chauffant et l'échantillon
- Φ_1 Transformée de Laplace de la densité de flux transmise au bloc d'aluminium supérieur
- Φ_2 Transformée de Laplace de la densité de flux transmise au bloc d'aluminium inférieur

$$A = D = \cosh\left(\sqrt{\frac{p}{a}} e\right); \quad B = \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{p}{a}} e\right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}}; \quad C = \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh\left(\sqrt{\frac{p}{a}} e\right) \quad (9.44)$$

$$A_i = D_i = \cosh\left(\sqrt{\frac{p}{a_i}} e_i\right); \quad B_i = \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{p}{a_i}} e_i\right)}{\lambda_i \sqrt{\frac{p}{a_i}}}; \quad C_i = \lambda_i \sqrt{\frac{p}{a_i}} \sinh\left(\sqrt{\frac{p}{a_i}} e_i\right) \quad (9.45)$$

λ	Conductivité thermique de l'échantillon
a	Diffusivité thermique de l'échantillon
e	Epaisseur de l'échantillon
λ_i	Conductivité thermique du polyuréthane
a_i	Diffusivité thermique du polyuréthane
e_i	Epaisseur du polyuréthane

Ce système conduit à :
$$\theta(p) = \frac{\Phi_0(p)}{\frac{D_1}{B_1} + \frac{D_i}{B_i}} \quad (9.46)$$

Le principe de la méthode est d'estimer les valeurs des paramètres E et R_c qui minimisent la somme des écarts quadratiques entre la courbe expérimentale et la courbe calculée avec la relation (). La transformation de Laplace inverse est réalisée par utilisation de l'algorithme de De Hoog (De Hoog, 1982) ou par la méthode de Stehfest (Stehfest, 1970). La valeur de la capacité thermique de l'élément chauffant est estimée par trois mesures de plan chaud symétrique (Jannot et al, 2010) réalisées avec deux échantillons de polyuréthane d'épaisseur 5cm placé de part et d'autre de l'élément chauffant.

9.3.2 Méthode d'estimation simplifiée

A titre d'exemple, la figure 9.13 représente la courbe simulée $T(t)$ calculée à partir de la relation () pour un échantillon d'épaisseur $e = 3$ cm, avec $\lambda = 2$ $W.K^{-1}.m^{-1}$ et $\rho c = 40000$ $J.m^{-3}.K^{-1}$. Les propriétés de la mousse de polyuréthane ont été prises égales à $e_i = 5$ cm, $\lambda_i = 0.033$ $W.K^{-1}.m^{-1}$ et $\rho c_i = 40000$ $J.m^{-3}.K^{-1}$. La capacité et la résistance thermique de l'élément chauffant ont été négligés. L'analyse de la courbe simulée $T(t)$ fait apparaître deux régimes illustrés sur la figure 2.

- Une zone où $T(t)$ est linéaire par rapport à $rac(t)$ au début (jusqu'à 150s sur l'exemple)
- Une zone où $T(t)$ est linéaire par rapport à t au début (après 400s sur l'exemple) correspondant à un régime semi-stationnaire

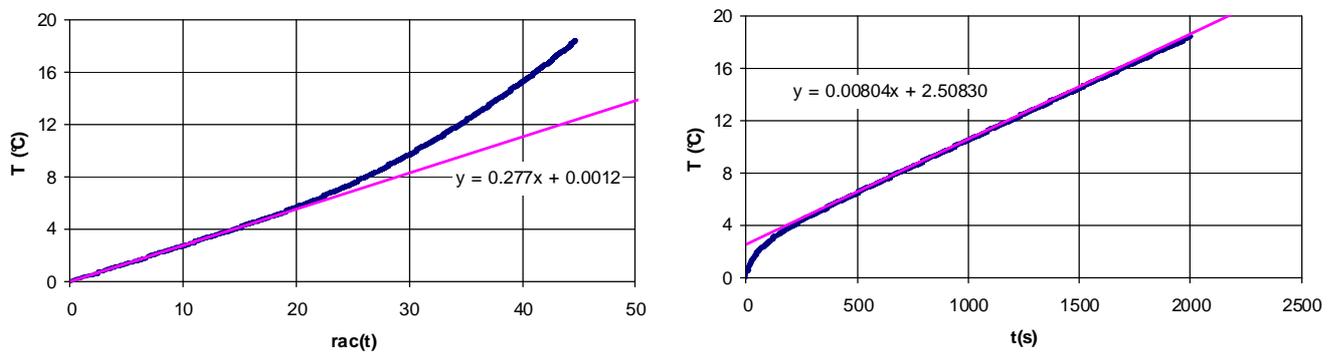


Figure 9.13: Courbe simulée $T(t)$ calculée pour $e = 3$ cm, $\lambda = 2$ $W.K^{-1}.m^{-1}$, $\rho c = 2.10^6$ $J.m^{-3}.K^{-1}$; $e_i = 5$ cm, $\lambda_i = 0.033$ $W.K^{-1}.m^{-1}$ et $\rho c_i = 40000$ $J.m^{-3}.K^{-1}$

Au début du chauffage, l'échantillon se comporte comme un milieu semi-infini et la température au centre de la face chauffée vérifie :

$$\theta(p) = \frac{\Phi_0(p)}{E_i \sqrt{p} + \frac{C_h p + (1 + R_c C_h p) E \sqrt{p}}{1 + R_c E \sqrt{p}}} \quad (9.47)$$

Pour des temps suffisamment longs ($p \rightarrow 0$) et en considérant un échelon de flux ($\Phi_0(p) = \frac{\phi_0}{p}$), un développement limité conduit à :

$$\theta(p) \approx \frac{\phi_0}{p^{3/2} (E + E_i)} + \frac{\phi_0}{p} \frac{R_c E^2 - C_h}{(E + E_i)^2} \quad (9.48)$$

La transformation de Laplace inverse de cette relation montre que l'effusivité thermique peut être estimée à partir de la pente α de la partie linéaire de la courbe $T(t) = f(\sqrt{t})$ par :

$$E = \frac{\phi_0}{\alpha \sqrt{\pi}} - E_i \quad (9.49)$$

L'application de cette relation à la courbe simulée représentée sur la figure 2 avec $\alpha = 0.0277$ conduit à $E = 1999 \text{ J.m}^{-2}.\text{K}^{-1}.\text{s}^{-1/2}$.

Par ailleurs aux temps plus longs, l'hypothèse d'un régime semi-stationnaire permet d'écrire :

$$\phi = [\rho c e + (\rho c e)_i + (\rho c e)_s] \frac{dT}{dt} \quad (9.50)$$

La capacité thermique ρc peut être estimée à partir de la pente β de la courbe $T(t)$ par la relation suivante :

$$\rho c = \frac{\phi}{\beta} - (\rho c e)_i - (\rho c e)_s \quad (9.51)$$

L'application de cette relation à la courbe simulée représentée sur la figure 2 avec $\beta = 0.00811$ estimé entre 500 et 600s conduit à $\rho c = 1,99.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$.

Cette méthode de pré-estimation conduit à des résultats précis dans le cas de matériaux "lourds" ($\rho c > 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$). Cependant, il est nécessaire de s'assurer que le transfert de chaleur reste 1D au centre sur l'intervalle d'estimation de β . Les valeurs ainsi pré-estimées sont ensuite utilisées comme valeurs initiales pour une méthode itérative utilisée pour l'estimation de λ et ρc par minimisation de la somme des écarts quadratiques entre le modèle 1D complet et la courbe expérimentale.

9.3.3 Domaine de validité de l'hypothèse 1D

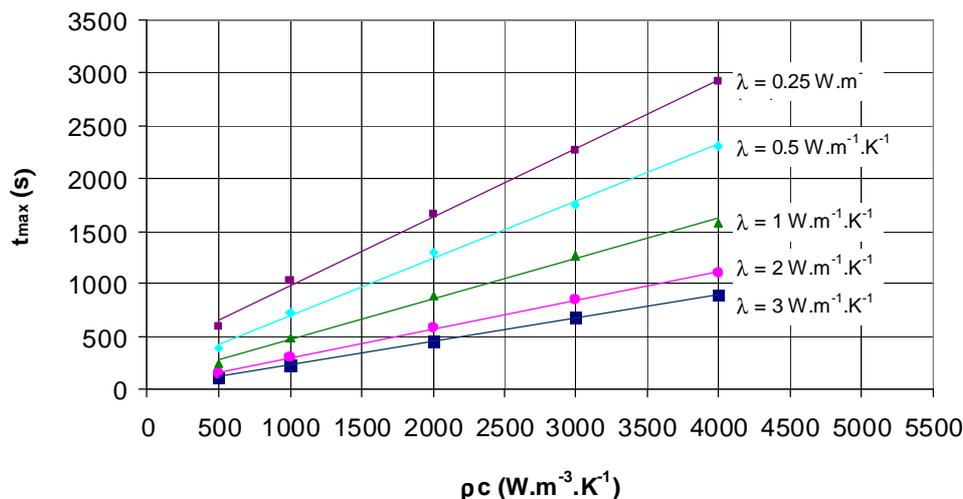


Figure 9.14: Validity limit of the 1D model

Des simulations 3D du système ont été réalisées avec COMSOL pour définir les limites de validité du modèle 1D. Les dimensions utilisées dans la simulation sont : $3 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$ pour l'échantillon et $5 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$ pour le polyuréthane. Les températures des faces extérieures du polyuréthane sont considérées comme constantes, le coefficient convectif sur les faces latérales a été pris égal à $10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

On a fait varier les propriétés thermiques de l'échantillon dans les limites suivantes : $\lambda \in [0,25; 0,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$, $\rho c \in [500; 4000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$. Pour chaque valeur de λ et ρc , la température au centre de la face chauffée est simulée successivement avec $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et avec $h = 0$ (transfert 1D) et on estime le temps t_{\max} correspondant à une différence relative de 1% entre les deux courbes simulées. Les résultats sont représentés sur la figure 9.14.

9.3.4 Validation de la méthode

Cette méthode a été appliquée à un échantillon de PVC dont les propriétés ont été mesurées par la méthode Flash (Degiovanni and Laurent, 1986) et par la mini-plaque chaude (Jannot et al, 2010) : $a = 1,25.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et

$\lambda = 0,184 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ conduisant à $\rho c = 1,47 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$.

L'échantillon de PVC a pour dimensions $5,9 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$, la densité de flux de chaleur est de 200 W.m^{-2} . La figure 9.15 représente la courbe expérimentale et la courbe modèle calculée avec les paramètres estimés. Le tableau 9.2 présente les valeurs pré-estimées par le modèle simplifié et estimées par le modèle complet.

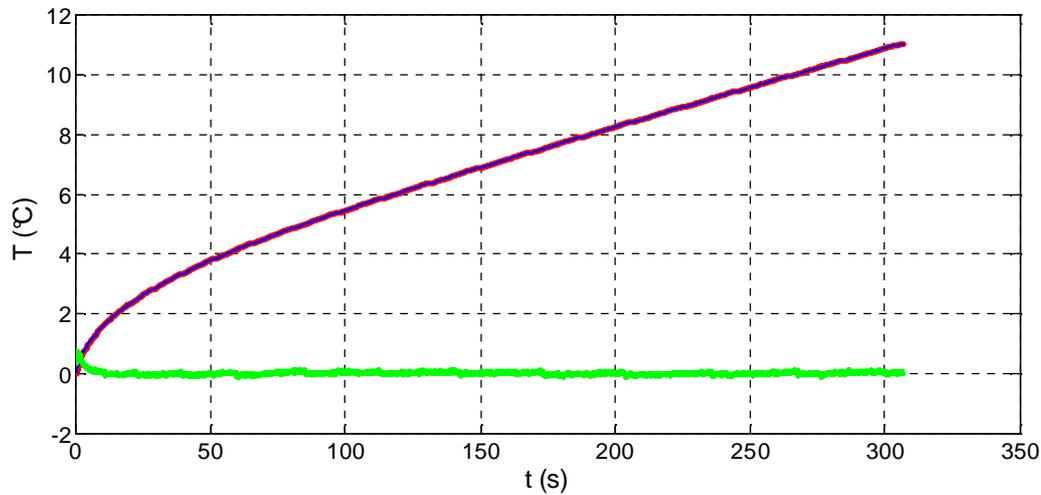


Figure 9.15: Courbe expérimentale et courbe modèle + résidus $\times 10$

Table 9.2: Valeurs pré-estimées et estimées des propriétés thermiques du PVC

		Modèle simplifié		Modèle 1D complet
	Unité	Intervalle de temps	Valeur	Intervalle de temps : 0-300s
E		15-60s	502	508
ρc	$\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$	250-300s	$1,401 \cdot 10^6$	$1,390 \cdot 10^6$
λ	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$		0,179	0,186

Les écarts entre les valeurs estimées et celles mesurées par d'autres méthodes sont inférieures à 5% ce qui est tout à fait acceptable. Comme prévu par l'étude théorique, les valeurs estimées par la méthode simplifiée sont très proches de celles estimées par le modèle complet 1D.

Cette méthode a été utilisée avec succès par Bal (Bal, 2011) pour la caractérisation thermique de briques de terre compactées avec ajout de différentes proportions d'un isolant naturel pour des valeurs de conductivité thermique allant de $0,3$ à $3,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et de capacité thermique variant entre 10^6 et $2,4 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$.

9.3.5 Mise en œuvre et limites

Cette méthode peut être mise en œuvre de manière extrêmement simple en utilisant une résistance chauffante plate (rectangulaire ou circulaire) de surface suffisante (au moins $10 \times 10 \text{ cm}^2$). On fixe au centre de cette résistance un thermocouple réalisé en fils fins (diamètre $< 0,05 \text{ mm}$).

La principale source d'incertitude est la valeur de la surface utile de chauffe S qu'il est préférable d'étalonner à partir de plusieurs mesures réalisées sur des échantillons « étalons » de propriétés thermiques connues. La mesure de la puissance électrique est précise. La mise en œuvre de la méthode nécessite en outre une alimentation stabilisée et un dispositif d'enregistrement de la tension délivrée aux bornes du thermocouple. L'enregistrement de température sera effectué de manière à ce que la portion de courbe où T est linéaire par rapport à t soit d'une longueur suffisante. Un pas de temps de $0,1 \text{ s}$ pour l'enregistrement de la température donne des résultats satisfaisants.

Pour les matériaux (hétérogènes) comportant des inclusions, on veillera à ce que l'épaisseur de l'échantillon soit égale à plusieurs fois la taille de ces inclusions. Une dimension d'échantillon de $30 \times 100 \times 100 \text{ mm}^3$ nous a conduit à de bons résultats.

10 METHODE DU RUBAN CHAUD PERMANENT

10.1 Introduction

Beaucoup de matériaux isolants ou faiblement conducteurs sont anisotropes en particulier les matériaux contenant des fibres. Ces fibres dont la conductivité thermique est supérieure à celle de la matière qui les entoure (air le plus souvent) constituent des voies de passages privilégiées de la chaleur. Si elles présentent une orientation privilégiée au sein du matériau il en résulte une anisotropie de la conductivité thermique du matériau. On peut classer les matériaux fibreux en 3 catégories :

- Les matériaux de type 1 contenant des fibres orientées suivant une direction privilégiée parmi lesquels on peut citer le bois.
- Les matériaux de type 2 contenant des fibres orientées suivant deux directions privilégiées parmi lesquels on peut citer les tissus.
- Les matériaux de type 3 pour lesquels la direction privilégiée des fibres n'est pas parallèle à une face de l'échantillon présentant alors trois conductivités directionnelles différentes.

Les deux premiers types de matériaux peuvent être disponibles en plaque mince selon deux configurations tel que schématisé sur la figure 10.1.

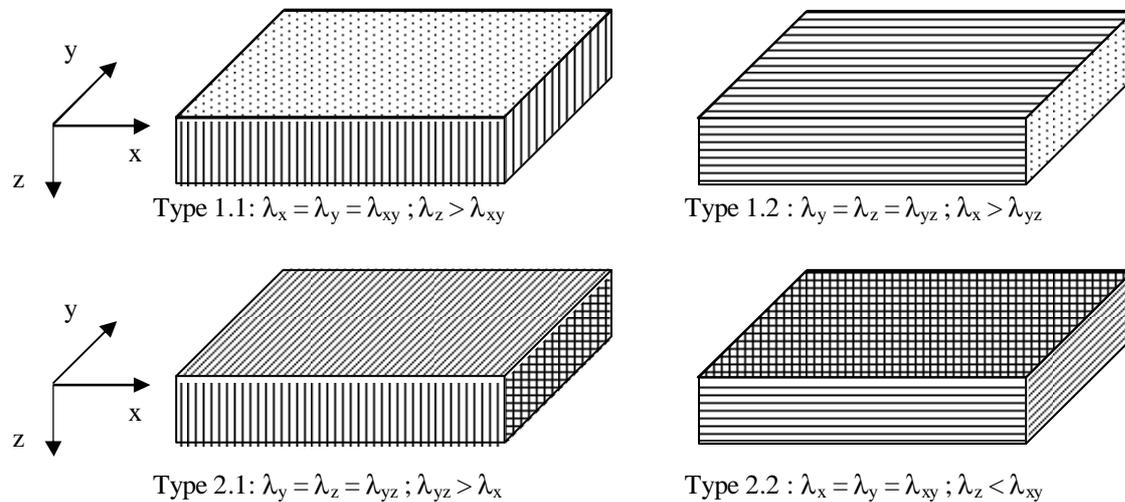


Figure 10.1 : Schéma d'échantillons de type 1 et 2

La mesure des deux ou trois conductivités thermiques directionnelles sur des matériaux anisotropes disponibles en faible épaisseur est complexe.

- Les méthodes de la plaque chaude gardée (Salmon, 2001 ; Xaman et al., 2009 ; Huang, 2006) du dispositif tricouche (Jannot et al., 2009) et de la mini plaque chaude (Jannot et al., 2009) ne permettent de mesurer que λ_z .
- Les méthodes du fil chaud (Andersson, 1976 ; Zhang et al., 1993 ; Rharbaoui, 1994, Coquard et al, 2009) et du hot disk (Gustafsson, 1991 ; Gustafsson et al., 1994 ; He, 2005) qui font l'hypothèse du milieu semi-infini sont inapplicables sur des échantillons de faible épaisseur.
- La méthode flash (Degiovanni, 1977) ne permet de mesurer que la diffusivité thermique a_z .
- La méthode laser flash (Cernuschi et al., 2004) ne s'applique pas aux matériaux isolants.
- La méthode du ruban chaud avec face arrière de l'échantillon maintenue à température constante (Ladevie et al., 2000) permet de mesurer deux conductivités anisotropes en réalisant deux mesures (avec rotation à 90° du ruban entre les deux mesures, cf. figure 10.2) pour un matériau de type 1.2 ou 2.1. Une approche a été réalisée (Gobbé et al., 2004) pour l'adapter aux matériaux de type 1.1 ou 2.2. mais la validation a été limitée à la détermination de la conductivité $\lambda_x = \lambda_y$ d'un matériau bicouche à partir d'une mesure ruban chaud et de la connaissance préalable de la conductivité λ_z .

La méthode du ruban chaud permanent permet de mesurer les conductivités thermiques λ_x , λ_y et λ_z d'un matériau isolant anisotrope mince dans le cas le plus général d'un matériau anisotrope de type 3.

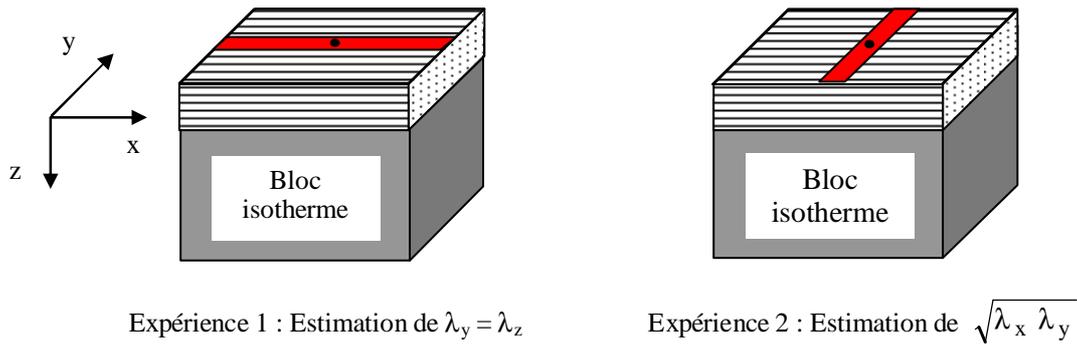


Figure 10.2 : Schématisation des deux mesures permettant de déterminer $\lambda_y = \lambda_z$ et λ_x par la méthode du ruban chaud (Ladevie et al., 2000)

10.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (cf. figure 10.3) comprend :

- Un ruban chauffant plan de faible épaisseur sur lequel est fixé un thermocouple de type K (diamètre des fils 0,05mm) inséré entre deux échantillons du matériau à caractériser.
- Deux blocs isothermes en aluminium d'épaisseur 4cm de section identique à celle des échantillons.
- Un dispositif de serrage permettant de contrôler la pression de serrage et l'épaisseur du dispositif inséré entre les blocs d'aluminium.

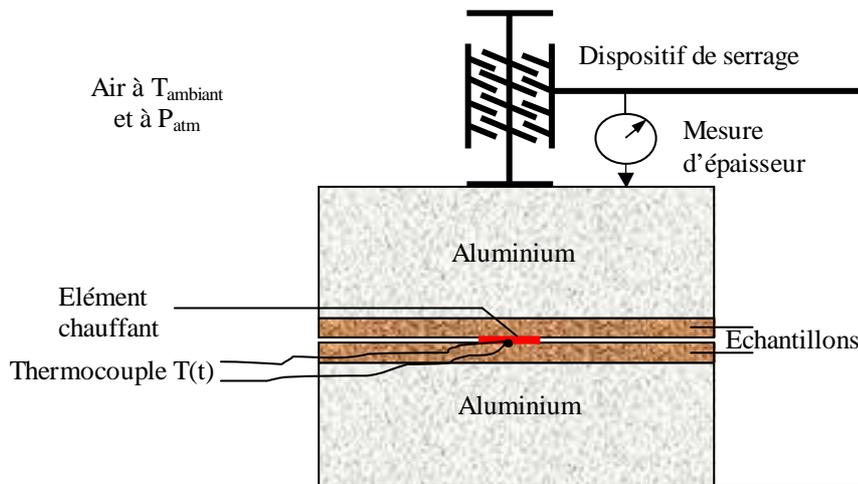


Figure 10.3 : Schéma du dispositif expérimental

L'élément chauffant est soumis à un échelon de flux et l'on mesure l'élévation de température T_0 obtenue en régime stationnaire au centre du ruban chauffant. On mesure également les températures de chacun des blocs d'aluminium pour vérifier qu'elles restent constantes.

Le principe de la méthode proposée est de réaliser trois mesures successives (cf. figure 10.4) :

- Une mesure de T_{01} avec un ruban de largeur $2b_1$ et deux échantillons d'épaisseur f_1
- Une mesure de T_{02} avec :
 - Soit un ruban de largeur $2b_1$ et deux échantillons d'épaisseur f_2 .
 - Soit un ruban de largeur $2b_2$ et deux échantillons d'épaisseur f_1 .
- Une mesure de T_{03} avec un ruban de largeur $2b_1$ et deux échantillons d'épaisseur f_1 après avoir fait subir au ruban une rotation de 90° .

L'exploitation des valeurs de T_{01} et de T_{02} connaissant la densité ϕ_0 du flux de chaleur et :

- soit la largeur $2b_1$ du ruban et les deux épaisseurs f_1 et f_2 des échantillons,
 - soit les largeurs $2b_1$ et $2b_2$ des rubans et l'épaisseur f_1 des échantillons,
- permet d'estimer séparément les conductivités thermiques λ_y et λ_z .

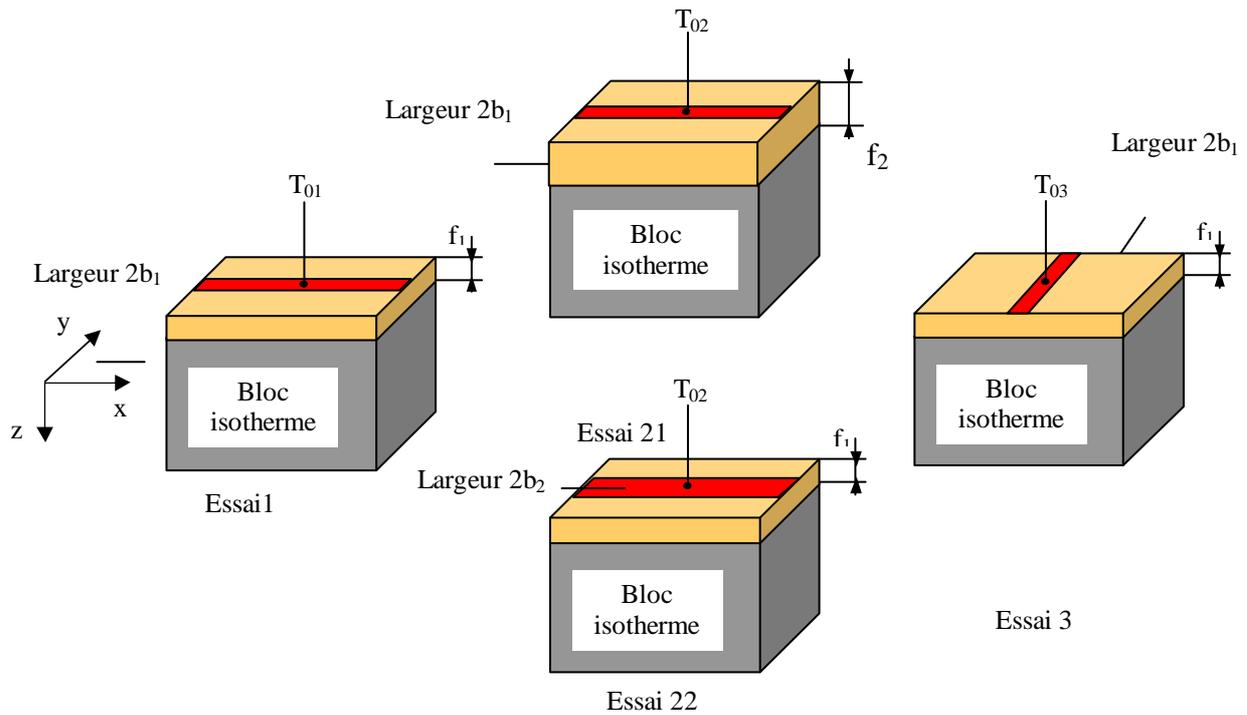


Figure 10.4 : Schéma de principe la méthode avec trois mesures

De la même manière, l'exploitation de la valeur de T_{03} connaissant λ_z permet d'estimer la conductivité thermique λ_x .

On sait en effet a priori que la relation liant la température d'équilibre aux conductivités n'est pas linéaire puisque dans le cas de la mesure de T_{01} ou de T_{02} par exemple :

- si f devient très petit (ou b très grand), la température limite ne dépend que de λ_z .
- si f devient très grand (ou b très petit), la température limite ne dépend que de $\sqrt{\lambda_y \lambda_z}$.

La modélisation du système schématisé sur la figure 5 va nous permettre de démontrer plus précisément comment ces conductivités thermiques λ_y et λ_z peuvent être déduites des valeurs de T_{01} et de T_{02} et comment λ_x peut ensuite être déduit de la valeur de T_{03} .

10.3 Modélisation

Modèle complet

Hypothèses :

- Echantillon de largeur $2d$, de longueur $2e$, d'épaisseur f
- Sonde d'épaisseur e_s , de largeur $2b$, de longueur $2c$, de masse volumique ρ_s et de capacité calorifique c_s
- Résistance de la sonde nulle
- Résistances de contact négligeables devant la résistance de l'échantillon
- Face arrière à température constante

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (10.1)$$

La méthode de résolution utilisée est la suivante :

- Transformation de Laplace
- Séparation des variables

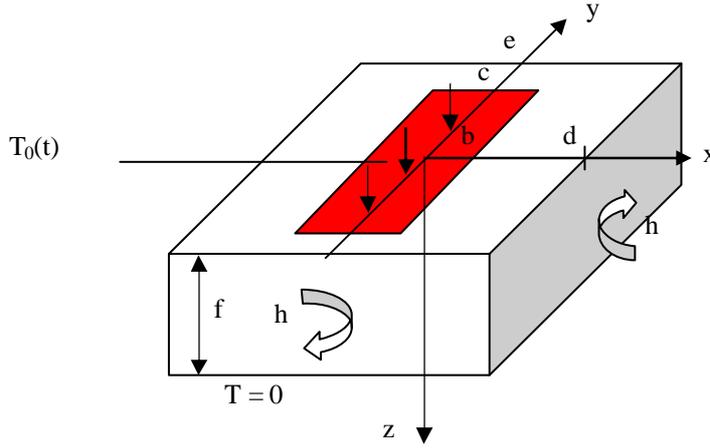


Figure 10.5 : Schéma du système modélisé

Les conditions initiales et aux limites s'écrivent :

$$T(x, y, f, t) = 0 \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial T(0, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial T(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0 \quad (10.4)$$

$$-\lambda_x \frac{\partial T(d, y, z, t)}{\partial x} = h[T(d, y, z, t) - T_i] \quad (10.5)$$

$$-\lambda_y \frac{\partial T(x, e, z, t)}{\partial y} = h[T(x, e, z, t) - T_i] \quad (10.6)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_i \quad (10.7)$$

$$\phi_0 = \rho_s e_s c_s \frac{\partial T_0}{\partial t} - \lambda_z \frac{\partial T(x, y, 0, t)}{\partial z} \quad (10.8)$$

Où : $\phi_0(t) = \phi_0$ si $x < b$ et $\phi_0(t) = 0$ si $x > b$

On pose $\Delta T(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_i$ et $L[\Delta T(x, y, z, t)] = \theta(x, y, z, p)$

La transformée de Laplace de la relation (1) s'écrit :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, p)}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, p)}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, p)}{\partial z^2} = \rho c p \theta(x, y, p) \quad (10.9)$$

On écrit la température après transformation de Laplace sous la forme suivante :

$$\theta(x, y, z, p) = X(x, p) Y(y, p) Z(z, p)$$

La résolution du système conduit à la solution :

$$\theta(x, y, z, p) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\Phi_0(p) \frac{\sin(\alpha_p b)}{\alpha_p} \frac{\sin(\delta_q c)}{\delta_q} \cos(\alpha_p x) \cos(\delta_q z) \sinh[\gamma_{pq}(f-y)]}{F_{pq} \left[\frac{\sin(2\alpha_p d)}{4\alpha_p} + \frac{d}{2} \right] \left[\frac{\sin(2\delta_q e)}{4\delta_q} + \frac{e}{2} \right]} \quad (10.10)$$

$$\text{où : } F_{pq} = \lambda_z \gamma_{pq} \cosh(\gamma_{pq} f) + \rho_s c_s e_s p \sinh(\gamma_{pq} f) \quad (10.11)$$

Et au centre de la face chauffée :

$$\theta(0,0,0,p) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\Phi_0(p) \frac{\sin(\alpha_p b)}{\alpha_p} \frac{\sin(\delta_q c)}{\delta_q} \sinh(\gamma_{pq} f)}{F_{pq} \left[\frac{\sin(2\alpha_p d)}{4\alpha_p} + \frac{d}{2} \right] \left[\frac{\sin(2\delta_q e)}{4\delta_q} + \frac{e}{2} \right]} \quad (10.12)$$

$$\text{Les valeurs propres } \alpha_p \text{ sont solutions de l'équation transcendante : } \alpha d \tan(\alpha d) = H_x \quad (10.13)$$

$$\text{avec : } H_x = \frac{h d}{\lambda_x} \quad (1014)$$

$$\text{Les valeurs propres } \delta_n \text{ sont solutions de l'équation transcendante : } \delta e \tan(\delta e) = H_y \quad (1015)$$

$$\text{avec : } H_z = \frac{h e}{\lambda_y} \quad (1016)$$

$$\alpha, \delta \text{ et } \gamma \text{ sont liés par la relation : } \lambda_z \gamma^2 = \rho c p + \lambda_x \alpha^2 + \lambda_y \delta^2 \quad (1017)$$

$$\text{Pour un échelon de flux : } \Phi_0(p) = \frac{\phi_0}{p}$$

Cette modélisation du régime variable nous permettra de vérifier a posteriori que le régime permanent était bien atteint au moment du relevé des températures T_{0i} .

La solution asymptotique en régime permanent s'écrit :

$$T(0,0) = T_0 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\phi_0 \frac{\sin(\alpha_p b) \sin(\delta_q c)}{\alpha_p \delta_q} \sinh(\gamma_{pq} f)}{\lambda_z \gamma_{pq} \cosh(\gamma_{pq} f) \left[\frac{\sin(2\alpha_p d)}{4\alpha_p} + \frac{d}{2} \right] \left[\frac{\sin(2\delta_q e)}{4\delta_q} + \frac{e}{2} \right]} \quad (1018)$$

Une première méthode consisterait à résoudre numériquement le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$T_{01} = F(f_1, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, b) \quad (1019)$$

$$T_{02} = F(f_2, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, b) \quad (1020)$$

où T_{01} et T_{02} sont calculés par la relation (18) dans laquelle on peut fixer $\lambda_x = \lambda_y$ et $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. On vérifiera ensuite que ces valeurs de λ_x et h n'ont pas d'influence sur les calculs (transfert 2D). Le problème est que la fonction F n'est pas explicite par rapport à λ_y et λ_z . Pour l'estimation des paramètres λ_y et λ_z , on utilise en fait une méthode itérative basée sur la minimisation par la méthode de Levenberg-Marquart de la somme Σ suivante (moindres carrés non linéaires) :

$$\Sigma = [T_{01\text{exp}} - f(e_1, \lambda_y, \lambda_z, b)]^2 + [T_{02\text{exp}} - f(e_2, \lambda_y, \lambda_z, b)]^2 \quad (1021)$$

On résout ensuite de la même manière l'équation restante :

$$T_{03} = F(f_1, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, b) \quad (1022)$$

en fixant λ_z pour estimer le dernier paramètre inconnu λ_x .

Modèle simplifié

Une deuxième méthode consiste à utiliser à la place de la fonction complexe F une fonction explicite G établie à partir d'un modèle 2D simplifié qui permettrait de réaliser une estimation plus rapide et plus simple des conductivités thermiques. On a modélisé le système simplifié représenté sur la figure 10.6.

Les hypothèses sont les suivantes :

- La longueur du ruban est suffisamment grande devant sa largeur pour que la température au centre ne dépende pas de y
- La largeur de l'échantillon est telle que l'on puisse faire l'hypothèse du milieu semi-infini selon Ox

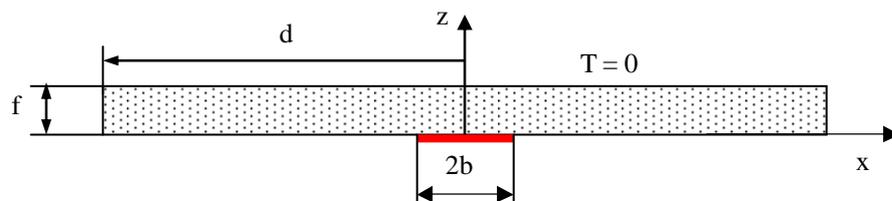


Figure 10.6 : Système simplifié 2D

Le système vérifie les équations suivantes :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T(x,z)}{\partial x^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T(x,z)}{\partial z^2} = 0 \quad (10.23)$$

$$T(x,f) = 0 \quad (10.24)$$

$$\frac{\partial T(0,z)}{\partial x} = 0 \quad (10.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (10.26)$$

$$\text{si } x < b : \phi_0 = -\lambda_z \frac{\partial T(x,0)}{\partial z} \quad (10.27)$$

$$\text{si } x > b : \phi_0 = 0 \quad (10.28)$$

La recherche d'une solution par la méthode de séparation des variables conduit à la solution :

$$T(0,0) = \frac{2 \phi_0}{\pi \sqrt{\lambda_x \lambda_z}} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha b)}{\alpha^2} \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_z}} \alpha f\right) d\alpha \quad (10.29)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$T(0,0) = \frac{b \phi_0}{\sqrt{\lambda_x \lambda_z}} I(u) \quad (10.30)$$

$$\text{avec } u = \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_z}} \frac{f}{b}$$

$$\text{où } I(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega^2} \tanh(u \omega) d\omega \quad (10.31)$$

La fonction I peut-être représentée avec une précision meilleure que 0,15% pour $u \in [0,5,5]$ par le polynôme suivant :

$$I(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5 + a_6 u^6 \quad (10.32)$$

Les valeurs des coefficients a_i déterminées pour $u \in [0,5, 5]$ sont données dans le tableau 10.1.

Tableau 10.1 : Valeurs des coefficients du polynôme I

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
-2.7042.10 ⁻⁴	0.0055375	-0.0475164	0.22443	-0.655252	1.3614	-0.06099

Si les hypothèses ayant permis l'établissement de ce modèle simplifié sont vérifiées, la réalisation de deux mesures de la température d'équilibre du ruban : T_{01} pour un ruban de largeur $2b_1$ et un couple d'échantillons d'épaisseur f_1 et T_{02} pour un ruban de largeur $2b_2$ et un couple d'échantillons d'épaisseur f_2 permet de déduire simplement les conductivités thermiques λ_x et λ_z . Il suffit de résoudre le système :

$$T_{01x} = \frac{b_1 \phi_1}{\sqrt{\lambda_x \lambda_z}} I\left(\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_z}} \frac{f_1}{b_1}\right) \quad (10.33)$$

$$T_{02z} = \frac{b_2 \phi_2}{\sqrt{\lambda_x \lambda_z}} I\left(\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_z}} \frac{f_2}{b_2}\right) \quad (10.34)$$

dans lequel I est une simple fonction polynomiale donnée par la relation (10.31).

Les relations (10.32 et (10.33) établies à partir du modèle 2D simplifié permettent de mettre en évidence le rôle symétrique joué par les grandeurs b et f à travers leur rapport. Il est donc théoriquement possible de déterminer séparément λ_x et λ_z en réalisant deux mesures :

- Soit avec deux rubans de largeurs respectives b_1 et b_2 sur un couple unique d'échantillons d'épaisseur f.
- Soit avec un ruban unique de largeur b sur deux couples d'échantillons de largeurs respectives f_1 et f_2 .

Les cas limites sont les suivants :

- Un ruban de très grande largeur correspondant à un plan chaud avec mesure de la température au centre permettant alors de mesurer directement λ_z .
- Un échantillon de très grande épaisseur correspond à un milieu semi-infini pour lequel le ruban chaud tend vers le fil chaud et où l'on mesure $\sqrt{\lambda_x \lambda_z}$.

Connaissant λ_z , la conductivité thermique λ_y s'obtient ensuite par résolution de l'équation :

$$T_{03} = \frac{b_1 \phi_3}{\sqrt{\lambda_x \lambda_z}} I \left(\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_z}} \frac{f_1}{b_1} \right) \quad (10.35)$$

Configuration optimale

En supposant que $\frac{\Delta T_{02}}{T_{02}} = \frac{\Delta T_{01}}{T_{01}}$, $\frac{\Delta b_1}{b_1} = \frac{\Delta b_2}{b_2}$, $\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2}$ et $\frac{\Delta \phi_1}{\phi_1} = \frac{\Delta \phi_2}{\phi_2}$, on montre que $\frac{\Delta \lambda_x}{\lambda_x}$ et $\frac{\Delta \lambda_z}{\lambda_z}$ sont minimum pour le même couple de valeurs extrêmes $u_2 = 0$ et $u_1 \rightarrow \infty$ (Jannot et al, 2011). La solution optimale est donc de réaliser une mesure de type plan chaud centré ($u_2 = 0$) dont les limites ont déjà été étudiées (Jannot et al., 2010) et une mesure avec un ruban de faible largeur ou un échantillon de grande épaisseur ($u_1 \rightarrow \infty$).

Dans ce cas optimal, on aboutit au résultat suivant :

$$\frac{\Delta \lambda_x}{\lambda_x} = 3 \frac{\Delta \lambda_z}{\lambda_z} \text{ avec } \frac{\Delta \lambda_z}{\lambda_z} = \frac{\Delta T_0}{T_0} + \frac{\Delta \phi}{\phi} + \frac{\Delta f}{f} \quad (10.36)$$

Dans les autres cas, le rapport entre $\frac{\Delta \lambda_x}{\lambda_x}$ et $\frac{\Delta \lambda_z}{\lambda_z}$ est toujours supérieur à 3.

Cas d'un matériau isotrope

On notera que dans le cas d'un matériau isotrope, la conductivité thermique peut se calculer de manière explicite par la relation : $\lambda = \frac{f \phi_0}{T_0} F \left(\frac{f}{b} \right)$ (10.37)

Où :

- $F \left(\frac{f}{b} \right)$ est un facteur de forme géométrique défini par : $F(u) = \frac{I(u)}{u}$ calculable de manière directe à partir de la relation (32) et dont on trouvera une représentation graphique sur la figure 10.7.
- ϕ est la densité de flux de chaleur dissipée dans le ruban chaud
- T_0 est la température asymptotique au centre du ruban chaud
- b et f sont respectivement la demi-largeur du ruban et l'épaisseur des échantillons

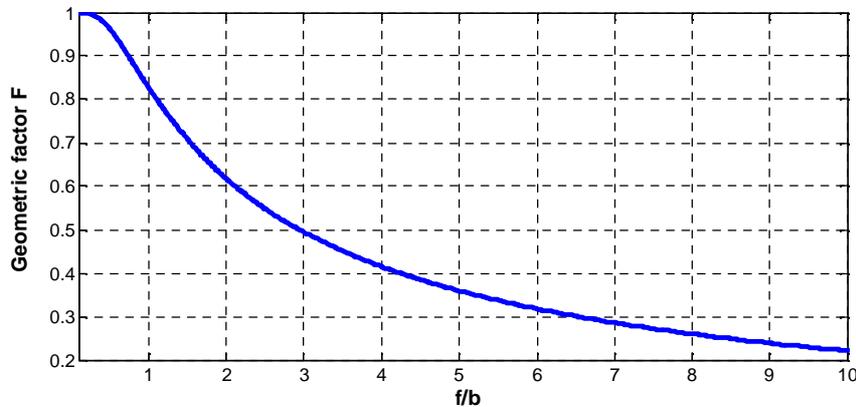


Figure 10.7 : Valeur du facteur de forme géométrique F

Limite de validité du modèle simplifié

Le modèle 2D simplifié repose sur les hypothèses suivantes :

- Le ruban est suffisamment long pour que les transferts de chaleur à ses extrémités n'influent pas sur la température au centre (T_0 indépendant de λ_x pour l'essai 1 de la figure 4)
- L'échantillon est suffisamment large pour que les transferts convectifs sur les faces latérales n'influent pas sur la température au centre du ruban.

Nous allons définir les limites de validité de ces hypothèses en considérant que la mesure est réalisée sur un échantillon isotrope de section carrée ayant pour côté la longueur du ruban ($c = d = e$) avec un coefficient d'échange convectif $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-2}$ et en supposant les blocs parfaitement isothermes. La largeur du ruban sera fixée à $2b = 6 \text{ mm}$ puis à $2b = 12 \text{ mm}$.

On calcule pour différentes valeurs de λ les valeurs des épaisseurs d'échantillons à ne pas dépasser pour maintenir l'erreur d'estimation en-dessous de 1%. On réalise pour tous ces cas de figure une simulation 3D

complète pour calculer la valeur de T_0 qui est ensuite utilisée pour estimer λ à partir de la relation (10.41). On calcule ensuite les écarts relatifs entre les valeurs nominales et estimées. On trouvera à titre d'exemple sur la figure 10.8 les résultats obtenus pour un échantillon carré de côté 40 mm.

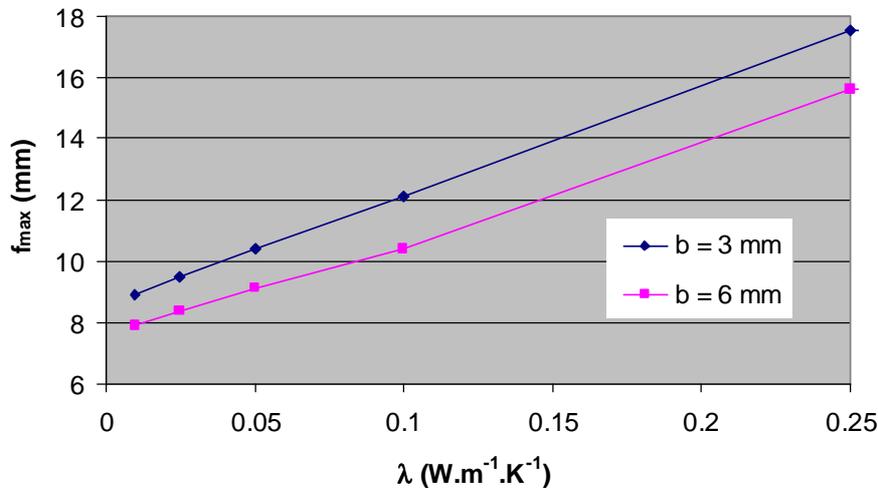


Figure 10.8 : Epaisseur d'échantillon f_{\max} correspondant à une erreur d'estimation de 1% sur λ pour un échantillon carré de côté 40 mm.

On constate que pour un ruban de largeur 6 mm et de longueur 40 mm, le modèle simplifié est valable pour des épaisseurs allant jusqu'à 9 mm pour les super-isolants et plus de 15mm pour des matériaux de conductivité thermique de l'ordre de $0,25 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Il n'est donc pas nécessaire de disposer d'échantillons de très grande section pour mesurer la conductivité de matériaux dont l'épaisseur est inférieure à 10mm.

10.4 Réalisation pratique de la mesure

Une étude expérimentale a été réalisée sur deux matériaux :

- Un matériau isotrope isolant léger : de la mousse de polyéthylène. Une mesure par la méthode du tricouche (Jannot et al, 2009) nous a permis d'estimer sa conductivité thermique : $\lambda = 0,0425 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ avec une précision estimée à 5%.
- Un matériau anisotrope : de l'Ayous (bois tropical léger). Trois mesures de type plan chaud réalisées sur des échantillons épais dans 3 directions différentes ont permis de mesurer les effusivités E_x , E_y et E_z . Une mesure par méthode flash sur un échantillon d'épaisseur 6 mm a permis de mesurer $a_z = 1,70 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. L'ensemble de ces mesures a permis d'estimer : $\lambda_x = \lambda_y = 0,103 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\lambda_z = 0,190 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ avec une précision estimée à 5%.

Cette étude a été réalisée en utilisant deux éléments chauffants :

- Un élément résistif chauffant d'épaisseur 0,25 mm, de longueur 44,0 mm et de largeur 6,5 mm.
- Un élément résistif chauffant d'épaisseur 0,25 mm, de longueur 44,0 mm et de largeur 44,0 mm

Un thermocouple de type K constitué de deux fils de diamètres 0,03mm a été fixé au centre de chaque élément.

Trois mesures ont été réalisées sur des échantillons de mousse de polyéthylène de dimensions $44,0 \times 44,0 \times 5,2 \text{ mm}^3$ avec l'élément chauffant de largeur 6,5 mm. On trouvera dans le tableau 10.2 les résultats obtenus.

Tableau 10.2 : Résultats des mesures ruban chaud effectuées sur la mousse de polyéthylène

	N° essai	ϕ_0	ΔT	λ
		$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$	$^{\circ}\text{C}$	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
e = 5,2 mm	1	76,3	6,17	0,0443
	2	109,9	8,89	0,0443
	3	149,6	12,05	0,0444
	Moyenne	111,9	9,04	0,0443

La valeur moyenne obtenue soit $\lambda = 0.0443 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ diffère de la valeur mesurée par la méthode du tricouche ($\lambda = 0.0425 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) de 4,2% ce qui est satisfaisant.

Pour l'Ayous, trois mesures ont été réalisées pour les trois configurations présentées sur la figure 8. Les dimensions des échantillons étaient les suivantes : Surface $S = 44 \times 44 \text{ mm}^2$ et épaisseur $f = 8,0 \text{ mm}$. Les essais 1 et 3 ont été réalisés avec l'élément chauffant de largeur 6,5 mm. L'essai 2 a été réalisé avec l'élément chauffant de surface $44 \times 44 \text{ mm}^2$ identique à la surface de l'échantillon correspondant à la méthode du plan chaud centré (Jannot et al, 2010). On remarquera sur cette figure que les directions Oy et Oz sont perpendiculaires au sens des fibres alors que la direction Ox est parallèle aux fibres. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.

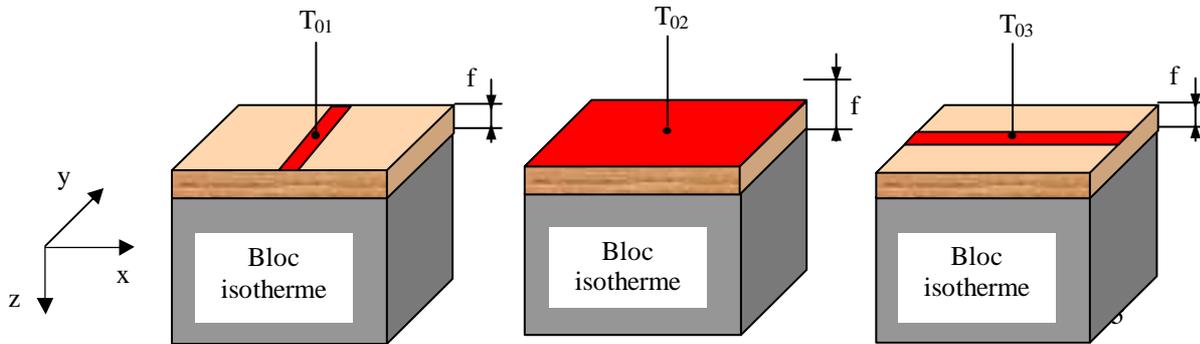


Figure 9 : Schématisation des 3 mesures réalisées

Le tableau 10.3 présente les résultats expérimentaux des 3 mesures réalisées pour chaque essai. Le tableau 10.4 présente les valeurs estimées des conductivités thermiques et un rappel des valeurs de la conductivité thermique estimée par combinaison de résultats obtenus par les méthodes du plan chaud et du flash.

On note que les valeurs des différentes conductions thermiques estimées par la combinaison des méthodes flash et plan chaud diffèrent d'au maximum 10 % pour λ_x et de moins de 1 % pour λ_z . En considérant des erreurs relatives de 1% sur ϕ , f , T_{01} , T_{02} et b_1 , l'application des relations (38) et (39) en prenant les valeurs absolues de chaque terme conduit à une erreur relative maximale de 14,3 % sur λ_x et de 2,5 % sur λ_z qui sont effectivement supérieures aux différences observées. L'utilisation d'un échantillon d'épaisseur égale à la valeur maximale admissible donnée par la figure 8 pour une largeur d'échantillon de 20mm soit $f = 12\text{mm}$ conduirait à une erreur maximale sur λ_x de 13,6 %.

Il est également à noter que la méthode du plan chaud aurait été inapplicable pour mesurer les effusivités thermiques E_x et E_y si le matériau n'avait été disponible qu'en faible épaisseur.

Tableau 10.3 : Résultats expérimentaux

	Essai 1		Essai 2		Essai 3	
Dimensions échantillon	8 x 44 x 44 mm ³					
Dimensions ruban	6,5 x 44 mm ²		44 x 44 mm ²		6,5 x 44 mm ²	
N° mesure	ϕ	T_{01}	ϕ	T_{02}	ϕ	T_{03}
1	188,9	7,63	97,03	7,65	251,2	9,11
2	242,7	9,83	144,9	11,33	294,8	10,77
3	303,2	12,34	202,4	15,6	341,9	12,52
Moyenne	222,7	9,93	148,1	11,53	296,0	10,80

Tableau 10.4 : Valeurs de λ ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) obtenues par la méthode du ruban chaud et par d'autres méthodes.

Ruban chaud			Plan chaud + Flash		
λ_z	λ_x	λ_y	λ_z	λ_x	λ_y
0,104	0,094	0,184	0,103	0,103	0,190

10.5 Limites de la méthode

Cette méthode stationnaire est particulièrement bien adaptée à la mesure des conductivités directionnelles de matériaux isolants anisotropes. Elle peut tout aussi bien être utilisée pour la mesure de la conductivité d'isolants

isotropes et l'exploitation de la mesure à l'aide de la relation (10.37) en fait alors une méthode très simple à utiliser. On veillera à respecter les limites de dimensions d'échantillons permettant de respecter les hypothèses d'établissement du modèle simplifié représentées sur l'abaque de la figure 8 pour un échantillon de section carrée de côté 40mm. D'autres abaques similaires pourront être établies pour des dimensions différentes.

11 METHODE DU HOT DISC

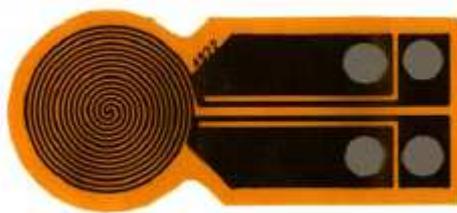


Figure 3.34 : Vue d'une sonde Hot disk

C'est une méthode en régime transitoire utilisant une sonde de forme cylindrique constituée d'une résistance de platine sous forme d'un ruban enroulé en spirale sur un support en matière plastique. La sonde est insérée entre deux échantillons du matériau à caractériser. Les dimensions du matériau doivent être suffisantes pour pouvoir faire l'hypothèse du milieu semi-infini. La résistance de platine est utilisée à la fois pour produire un flux de chaleur et pour mesurer la température moyenne $\bar{T}(t)$ du disque.

Il a été montré par Gustafsson S.E. (1990) que cette élévation de la température moyenne peut être décrite avec une bonne précision par les expressions suivantes :

$$\bar{T}(t) = \varphi_0 \left(\pi^{3/2} r \lambda \right) D(\tau) \quad (11.1)$$

$$\text{avec } \tau = \sqrt{\frac{a t}{r^2}} \quad (11.2)$$

$$\text{et } D(\tau) = [m(m+1)]^{-2} \int_0^\tau d\sigma \sigma^{-2} \left[\sum_{l=1}^m l \sum_{k=1}^m k \exp\left(-\frac{l^2 + k^2}{4 m^2 \sigma^2}\right) I_0\left(\frac{1 k}{2 m^2 \sigma^2}\right) \right] \quad (11.3)$$

si l'espace entre les spires devient très petit, cette solution tend vers :

$$D(\tau) = \int_0^\tau d\sigma \sigma^{-2} \int_0^1 v dv \int_0^1 u du \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{4 \sigma^2}\right) I_0\left(\frac{u v}{2 \sigma^2}\right) \quad (11.4)$$

Une très légère correction sur le temps permet d'obtenir une concordance parfaite entre les deux expressions.

L'estimation des paramètres doit être réalisée entre t_{\min} et t_{\max} tels que : $t_{\min} \geq \frac{\delta_s^2}{a_s}$ et $t_{\max} \leq 1,1 \frac{r^2}{a}$, où d_s et a_s sont respectivement l'épaisseur et la diffusivité thermique de la sonde d'après Bohac et al (2000).

Dans cette zone, la température n'est plus sensible à la perturbation créée par la sonde et les sensibilités à la diffusivité thermique a et à la conductivité thermique λ sont décorréliées ce qui permet de les estimer séparément.

Informations techniques sur le dispositif hot disk : <http://www.hotdisk.se/>

12 METHODE DE LA MINI-PLAQUE CHAUDE

12.1 Principe de la mesure

Cette méthode permet de mesurer de la conductivité thermique en régime permanent. La figure 12.1 donne le schéma de principe du dispositif expérimental.

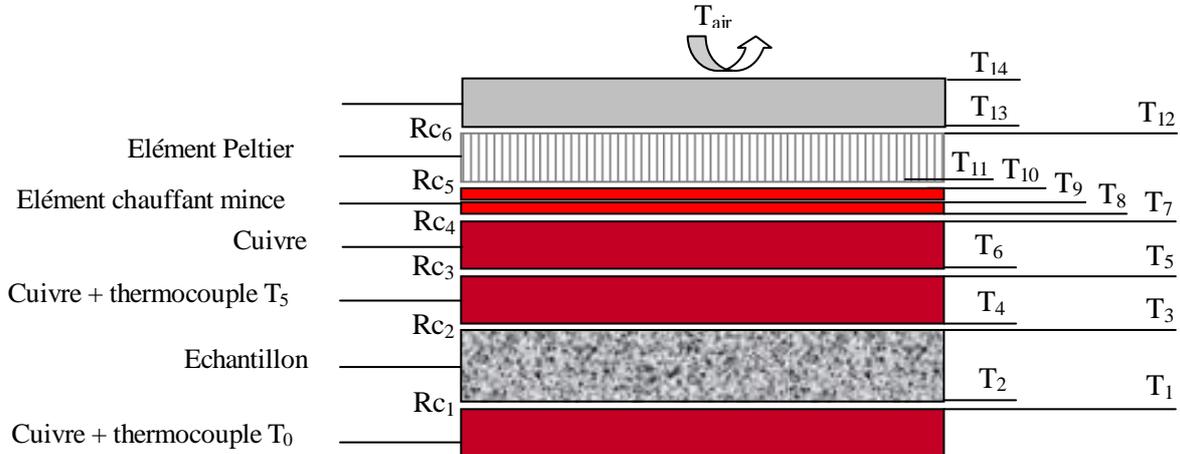


Figure 12.1 : Schéma de principe du dispositif expérimental

L'élément chauffant est une résistance plane insérée entre deux feuilles de Kapton, ses dimensions sont de $39 \times 39 \times 0,16 \text{ mm}^3$, sa résistance électrique est $R_e = 40,5 \Omega$. Tous les autres éléments du dispositif sont de section carrée de côté a ($a = 40 \text{ mm}$).

Les températures T_0 , T_5 et T_{air} sont mesurées à l'aide de thermocouples de type K avec une résolution de $0,025 \text{ K}$. L'écart type sur les mesures de température en régime stationnaire peut toutefois être diminué en réalisant un grand nombre de mesures.

La tension appliquée aux bornes de l'élément chauffant est mesurée avec une précision de $0,01 \text{ V}$.

Les résistances de contact entre les différents éléments sont minimisées en enduisant chaque surface de graisse thermoconductrice et en exerçant une pression sur l'ensemble. Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 12.2.

Le principe de l'expérience est d'ajuster la tension U appliquée à l'élément chauffant de façon à obtenir $T_5 = T_{\text{air}}$ ce qui permet de rendre négligeables les pertes latérales convectives dans les deux éléments en cuivre au-dessus de l'échantillon. Le flux $\Phi_{9\uparrow}$ dissipé sur la partie supérieure de l'élément chauffant est mesuré à l'aide de l'élément Peltier étalonné en fluxmètre, on en déduit la valeur $\Phi_{9\downarrow}$ du flux dissipé sur la partie inférieure :

$$\Phi_{9\downarrow} = \Phi_9 - \Phi_{9\uparrow} \quad (12.1)$$

Avec :
$$\Phi_9 = \frac{U^2}{R_e}$$

La température T_0 est fixée soit par circulation d'eau par bain thermostaté soit par un élément à effet Peltier.

Ce dispositif mesure la résistance thermique située entre les points de température T_0 et T_5 soit :

$$R_{\text{th}} = 2 R_{\text{thCu}} + 2 R_c + \frac{e}{\lambda S} \quad (12.2)$$

L'estimation de la conductivité thermique de l'échantillon ne sera donc possible qu'à condition que $\frac{e}{\lambda S} > 2 R_{\text{thCu}} + 2 R_c$, elle pourra alors être estimée par :

$$\lambda = \frac{e \Phi_{9\downarrow}}{S (T_5 - T_0)} \quad (12.3)$$

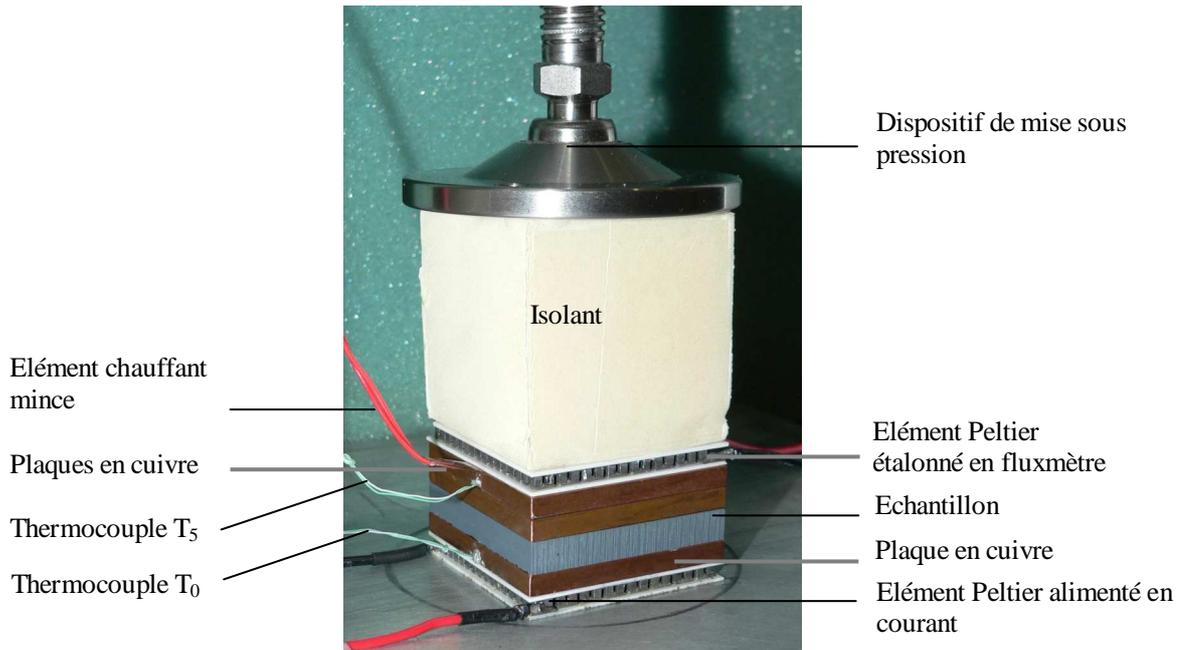


Figure 12.2 : Vue du dispositif expérimental

Les résistances de contact ont été estimées en appliquant une tension de 10V à l'élément chauffant et en mesurant les températures T_0 et T_5 en l'absence d'échantillon. En considérant $\lambda_{Cu} = 400 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, on a obtenu $r_c = 10^{-4} \text{ K.W}^{-1}.\text{m}^2$. La méthode n'est donc applicable que pour des échantillons tels que $e > 0,01 \lambda$ pour que l'erreur induite par les résistances de contact soit inférieure à 2%, ce qui limite a priori son applicabilité aux matériaux de conductivité faible à moyenne.

L'autre méthode pour s'affranchir des résistances de contact consiste pour un produit à effectuer deux mesures (1 et 2) sur deux échantillons d'épaisseurs différentes :

$$R_{th1} = 2 R_{thCu} + 2 R_c + \frac{e_1}{\lambda S} \quad (12.4)$$

$$R_{th2} = 2 R_{thCu} + 2 R_c + \frac{e_2}{\lambda S} \quad (12.5)$$

D'où :

$$\lambda = \frac{e_2 - e_1}{S (R_{th1} - R_{th2})} \quad (12.6)$$

Avec : $R_{th2} = \left(\frac{T_5 - T_0}{\Phi_{9\downarrow}} \right)_2$ et $R_{th1} = \left(\frac{T_5 - T_0}{\Phi_{9\downarrow}} \right)_1$

Cette méthode est particulièrement intéressante pour les échantillons de faible épaisseur.

Même si cette condition est remplie, la valeur estimée par les relations (12.3) ou (12.6) reste entachée d'une erreur due aux apports convectifs sur les faces latérales de l'échantillon qui ont pour effet de modifier les flux entrant et sortant de l'échantillon et de les rendre différents de $\Phi_{9\downarrow}$ utilisé dans l'estimation de λ . Une modélisation du système prenant en compte ces échanges permet de diminuer l'erreur d'estimation.

12.2 Modélisation quadripolaire

Modèle simplifié de l'ailette

Le système peut être modélisé par la méthode des quadripôles (Maillet et al, 2000) en approximant les pertes latérales convectives par le modèle de l'ailette. La température dans chaque élément du dispositif vérifie alors l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h P}{\lambda S} (T - T_{air}) = 0 \quad (12.7)$$

Avec :

h coefficient de transfert global
 P périmètre
 λ conductivité thermique
 S section

La relation liant les températures des deux faces de chaque élément peut s'écrire sous forme quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} T_{i+1} - T_{\text{air}} \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i - T_{\text{air}} \\ \phi_i \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

$$A = \text{ch}(\alpha e) = D$$

où : $B = \frac{1}{\lambda \alpha S} \text{sh}(\alpha e)$ avec $\alpha^2 = \frac{h P}{\lambda S}$ et $e =$ épaisseur de l'élément

$$C = \lambda \alpha S \text{sh}(\alpha e)$$

Les grandeurs mesurées sont T_0 , T_5 , Φ_9 et $\Phi_{9\uparrow}$.

En posant $\theta = T - T_{\text{air}}$, on peut écrire (voir schémas électriques équivalents sur la figure 12.3) :

$$\begin{bmatrix} \theta_9 \\ \phi_{9\downarrow} \end{bmatrix} = [M5][RC4][M4][RC3][M3][RC2][M2][RC1][M1] \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{90} & B_{90} \\ C_{90} & D_{90} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

$$\text{Et : } \begin{bmatrix} \theta_9 \\ \phi_{9\downarrow} \end{bmatrix} = [M5][RC4][M4][RC3] \begin{bmatrix} T_5 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{95} & B_{95} \\ C_{95} & D_{95} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

Les différentes matrices quadripolaires correspondent aux éléments suivants :

- M1 Élément en cuivre inférieur maintenu à T_0
- M2 Echantillon à caractériser
- M3 Élément en cuivre situé au-dessus de l'échantillon
- M4 Élément en cuivre situé en dessous de l'élément chauffant
- M5 Demi-épaisseur de l'élément chauffant (Kapton)
- RC1 Résistance de contact à l'interface M1/M2
- RC2 Résistance de contact à l'interface M2/M3
- RC3 Résistance de contact à l'interface M3/M4
- RC4 Résistance de contact à l'interface M4/M5

Les relations matricielles (12.9) et (12.10) permettent d'écrire :

$$D_{90} \theta_9 - B_{90} \phi_{9\downarrow} - (A_{90} D_{90} - B_{90} C_{90}) \theta_0 = 0 \quad (12.11)$$

$$D_{95} \theta_9 - B_{95} \phi_{9\downarrow} - (A_{95} D_{95} - B_{95} C_{95}) \theta_5 = 0 \quad (12.12)$$

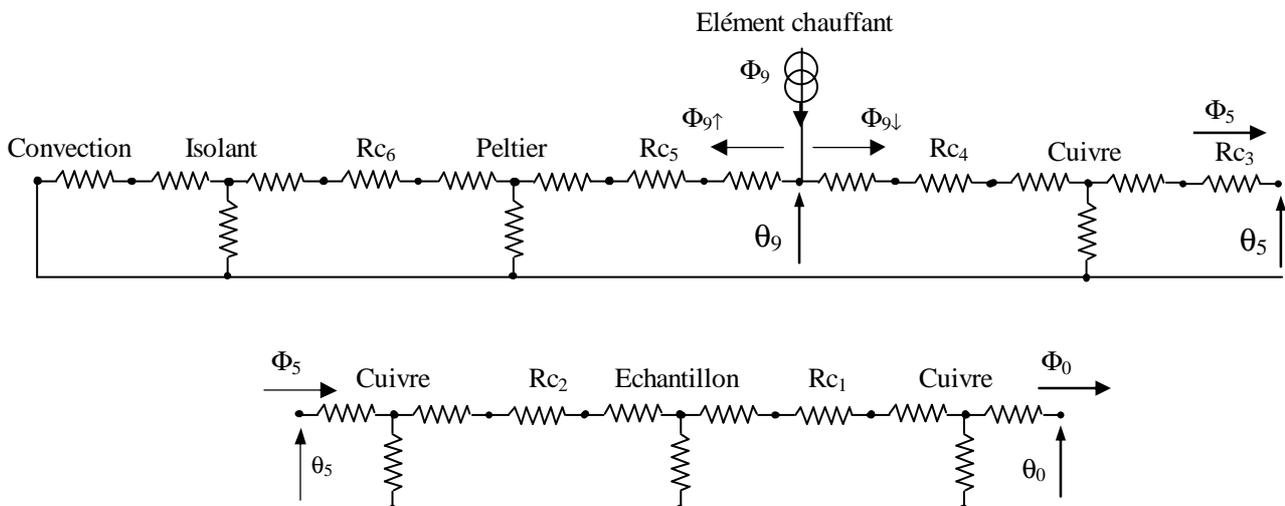


Figure 12.3 : Schéma électrique équivalent au dispositif expérimental

On peut éliminer θ_9 entre ces deux équations pour aboutir à l'équation suivante où les seules grandeurs inconnues sont la conductivité thermique λ de l'échantillon, le coefficient h et les résistances de contact cuivre-échantillon.

En effet $\Phi_{9\downarrow}$ est connu à partir de la mesure du flux $\Phi_{9\uparrow}$ grâce à l'élément Peltier utilisé en fluxmètre (il délivre une tension proportionnelle à la différence de température entre ses deux faces). Il a été noté que le flux $\Phi_{9\uparrow}$ est toujours très faible puisque la température T_5 est très proche de T_{air} , ainsi l'étalonnage du fluxmètre n'est pas une source d'erreur importante, $\Phi_{9\uparrow}$ étant en fait un terme correctif petit devant Φ_9 . On obtient :

$$D_{90} \frac{B_{95} \phi_{9\downarrow} - (A_{95} D_{95} - B_{95} C_{95}) \theta_5}{D_{95}} - B_{90} \phi_{9\downarrow} - (A_{90} D_{90} - B_{90} C_{90}) \theta_0 = 0 \quad (12.13)$$

La résolution de cette équation permet d'estimer une valeur de λ plus précise que la valeur approchée calculée par la relation (12.3).

Modèle complet

Pour simplifier les calculs nous allons supposer que notre système possède une symétrie de révolution, on passe de la section carrée à la section circulaire en conservant le rapport P/S soit en fixant le rayon R de la section circulaire égal au $\frac{1}{2}$ côté $a/2$ de la section carrée. Dans ce cas l'équation de la chaleur en 2D axisymétrique s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (12.14)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h (T - T_{\text{air}}) \text{ en } r = R \quad (12.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ en } r = 0 \quad (12.16)$$

Il est possible de calculer la solution exacte du système d'équations (12.16), (12.17) et (12.18) par transformation intégrale, on aboutit à :

$$\tilde{\theta}(\omega_n, z) = R^2 \frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n} \left[\left(\theta_e - \theta_0 \operatorname{ch} \left(\frac{\omega_n e}{R} \right) \right) \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\omega_n z}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\omega_n e}{R} \right)} + \theta_0 \operatorname{ch} \left(\frac{\omega_n z}{R} \right) \right] \quad (12.17)$$

et la solution du problème :

$$\theta(r, z) = \sum_n \frac{\tilde{\theta}(\omega_n, z) J_0 \left(\frac{\omega_n r}{R} \right)}{N_n} \quad (12.18)$$

Reprenons l'équation du système qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \frac{2h}{\lambda R} \frac{\theta_R}{\bar{\theta}} \bar{\theta} = 0 \quad (12.19)$$

Dans l'approximation de l'ailette : $\theta_R / \bar{\theta} = 1$

On peut évaluer $\theta_R / \bar{\theta}$ en utilisant la solution exacte (12.18) soit :

$$\bar{\theta}(z) = \sum_n \frac{\tilde{\theta}(\omega_n, z)}{N_n} \frac{2J_1(\omega_n)}{\omega_n} \quad (12.20)$$

$$\theta_R(z) = \sum_n \frac{\tilde{\theta}(\omega_n, z)}{N_n} J_0(\omega_n) \quad (12.21)$$

Dans le cas général, l'inconvénient de cette correction est de dépendre de z , pour valider l'approche nous utiliserons soit 6 termes soit 100 termes des séries en calculant $\theta_R / \bar{\theta}$ en $z = e/2$. Par contre, si l'on utilise le premier terme de la série on obtient :

$$\frac{\theta_R}{\bar{\theta}} = \frac{\omega_0^2}{2 \operatorname{Bi}} \quad (12.22)$$

Cette correction a l'avantage d'être très simple à mettre en œuvre car il suffit de remplacer dans l'équation de

l'ailette $\frac{2h}{\lambda R}$ par $\frac{\omega_0^2}{R^2}$, ω_0 étant solution de l'équation $\omega_n J_1(\omega_n) = \text{Bi} J_0(\omega_n)$, plusieurs auteurs en ont proposé des formules approchées (on donne en annexe A.5 une expression à mieux que 1%). Il est possible de calculer la valeur de $\lambda_{\text{estimé}}$ à partir de cette correction soit :

$$\frac{\lambda_{\text{estimé}}}{\lambda_{\text{réel}}} = \frac{\omega_0 e}{R \operatorname{sh}\left(\frac{\omega_0 e}{R}\right)} \quad (12.23)$$

On montre que les valeurs du rapport $\lambda_{\text{estimé}}/\lambda_{\text{réel}}$ calculées par la relation (3.48) présentent un écart inférieur à 2% par rapport à celles déduites de la simulation dans MATLAB pour des valeurs du nombre de Biot inférieures ou égales à 2. De façon générale, ceci montre qu'en remplaçant $\frac{2h}{\lambda R}$ par $\frac{\omega_0^2}{R^2}$ dans l'approximation de l'ailette, cette approximation reste valable jusqu'à des valeurs du nombre de Biot égales à 2 (alors que l'approximation classique n'est valable que pour des nombres de Biot inférieurs à 0.1).

12.3 Evaluation des incertitudes

Deux paramètres restent difficiles à évaluer avec précision, le coefficient d'échange h et les résistances de contact échantillon-cuivre R_c . Aussi, nous allons donner une estimation des incertitudes liées à la méconnaissance de ces paramètres.

Echantillon disponible en une seule épaisseur

On retient l'hypothèse que le coefficient de transfert convectif h est compris entre $5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et que les résistances de contact r_c sont comprises entre $5.10^{-5} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ et $2.10^{-4} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$.

On calcule à l'aide du modèle quadripolaire avec correction du coefficient de transfert latéral (100 termes) la tension nécessaire pour satisfaire la condition $T_5 = T_{\text{air}}$ pour chaque configuration et pour les deux couples de conditions « extrêmes » suivants :

1. $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $R_c = 2.10^{-4} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$
2. $h = 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $R_c = 5.10^{-5} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$

On réalise à partir des deux valeurs obtenues deux estimations λ_1 et λ_2 de λ par application d'une méthode inverse au modèle quadripolaire (relation (12.13)) avec correction du coefficient de transfert latéral (6 termes) en fixant un couple de valeur moyennes $h = 7.5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $R_c = 10^{-4} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$. On retient comme incertitude sur l'estimation de λ liée aux incertitudes sur h et R_c la valeur maximale entre les deux écarts $|\lambda - \lambda_1|$ et $|\lambda - \lambda_2|$. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 12.4.

Amélioration de la précision par la réalisation de 2 mesures

Il est possible de s'affranchir des incertitudes sur h ou r_c en effectuant deux mesures sur deux échantillons d'épaisseurs différentes. Les mesures sont traitées en utilisant la relation (12.20) dans laquelle figure 3 inconnues λ , h et R_c (dans la méthode à un échantillon on fixe les valeurs de h et r_c pour estimer λ).

* Cas des matériaux conducteurs ($\lambda > 2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

Dans ce cas les erreurs proviennent des résistances de contact, la valeur du coefficient d'échange (h compris entre 5 et $10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) n'a aucune importance sur le résultat de l'identification. On fixe donc h ($h = 7,5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) et on identifie λ et R_c par méthode inverse appliquée à la relation (12.13) écrite une fois pour chacune des deux mesures.

* Cas des matériaux isolants ($e/\lambda > 0.1 \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$)

Dans ce cas les erreurs dues aux résistances de contact sont négligeables (inférieure à 1%). Aussi on fixe R_c ($R_c = 10^{-4} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$) et on identifie λ et h par méthode inverse appliquée à la relation (12.13) écrite une fois pour chacune des deux mesures.

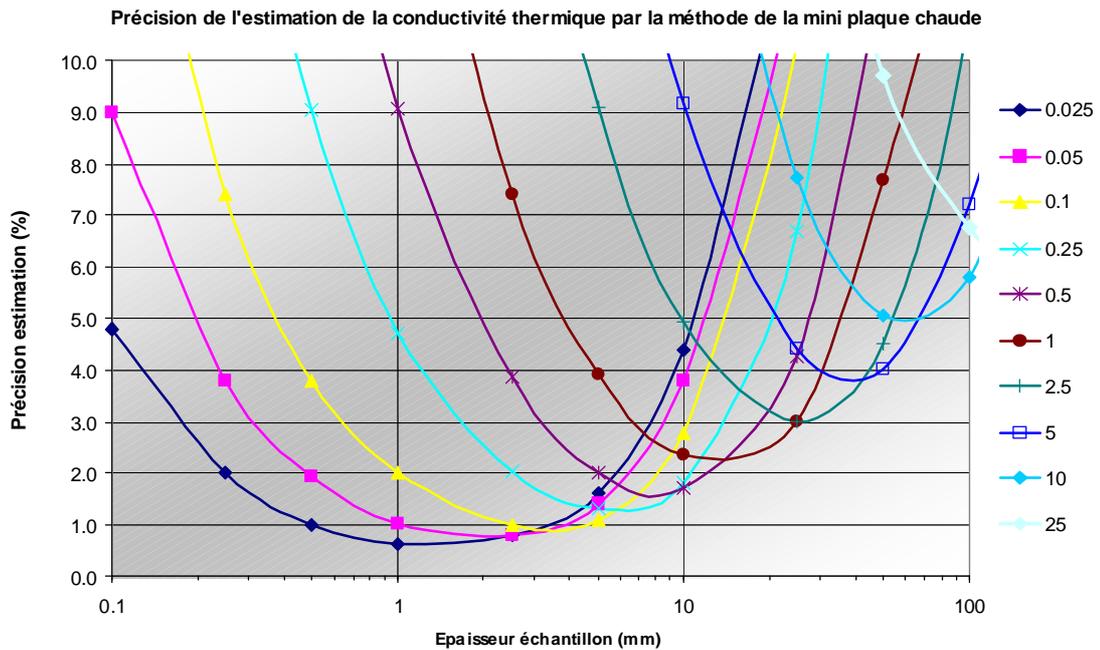


Figure 12.4 : Précision de l'estimation de la conductivité thermique en fonction de l'épaisseur de l'échantillon ($R = 2 \text{ cm}$)

Exemples de résultats expérimentaux

En utilisant la relation (12.13), λ_1 a été estimé en fixant les valeurs $h = 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, $R_c = 5.10^{-5} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ et λ_2 a été estimé en fixant les valeurs $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, $R_c = 2.10^{-4} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$.

Echantillons Verre:

Expérience 1 : $e = 5,92 \text{ mm}$: $\lambda_1 = 1,013 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$\lambda_2 = 1,075 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Expérience 2 : $e = 2,07 \text{ mm}$: $\lambda_1 = 1,008 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$\lambda_2 = 1,185 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Expérience 1 + Expérience 2 : $\lambda = 1,015 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $R_c = 5,01.10^{-5} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$

Le résultat est indépendant de h pour $5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} < h < 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

La valeur mesurée par calorimétrie + méthode flash est :

$a = 5,00.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $R_c = 2,00.10^{-6} \text{ J.kg}^{-1}$ d'où $\lambda = 1,00 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

L'écart entre les deux valeurs est de 1,5%.

Echantillon Polystyrène expansé de densité 38 kg.m^{-3} :

$e = 18,00 \text{ mm}$: $\lambda_1 = 0,0334 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$\lambda_2 = 0,0367 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Echantillon PVC :

$e = 5,88 \text{ mm}$: $\lambda_1 = 0,1808 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$\lambda_2 = 0,1858 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

12.4 Conclusion

Cette méthode simple d'utilisation permet la mesure de la conductivité thermique de matériaux isolants ou faiblement conducteurs (conductivité thermique allant de 0.025 à $5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) ainsi que la résistance thermique de systèmes hétérogènes (de 2.10^{-1} à $10^{-3} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$). L'appareillage ne nécessite que de petits échantillons ($40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ et de 1 à 30 mm d'épaisseur). Une étude précise de l'influence des échanges latéraux (coefficient h) et des résistances de contact (R_c) a permis de mettre au point un protocole limitant leurs influences.

L'analyse mathématique du système a été menée en utilisant l'approximation de l'ailette étendue à des nombres de Biot importants ce qui a permis de conserver l'approche quadripolaire et ainsi d'utiliser une méthode d'identification simple et précise.

Néanmoins, lorsque l'échantillon se présente en une seule épaisseur, il n'est pas possible de s'affranchir totalement de h et de R_c (la conductivité thermique étant corrélée avec les pertes et les résistances de contact) mais il est possible de calculer les incertitudes attendues en fonction de la conductivité thermique et de l'épaisseur de l'échantillon. Dans le cas d'échantillon se présentant sous plusieurs épaisseurs il est possible de s'affranchir presque totalement de h et de rc en effectuant deux mesures sur deux échantillons d'épaisseurs différentes.

13 CHOIX D'UNE METHODE

On trouvera dans le tableau 13.1 un récapitulatif des méthodes de mesures préconisées pour la mesure des propriétés thermiques en fonction de la gamme de conductivité thermique.

A chaque fois que cela sera possible, on aura toujours intérêt à utiliser plusieurs méthodes permettant d'estimer par deux calculs différents le même paramètre. Par exemple pour un matériau conducteur, la méthode Flash et la calorimétrie permettent de mesurer a et c , d'où l'on peut déduire la valeur de λ . Une mesure de la conductivité thermique de λ par la méthode du fil chaud conduisant à une valeur proche de la première permet alors de valider les résultats obtenus pour a et c .

Tableau 13.1 : Méthodes conseillées pour la mesure des propriétés thermiques d'un solide (en fonction de la conductivité)

Gamme de conductivité ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	Méthodes conseillées	Grandeurs mesurés	Remarques
$\lambda > 5$	Flash Calorimétrie différentielle Fil chaud	a c λ	Condition milieu semi-infini à vérifier
$5 > \lambda > 0.5$	Plan chaud centré face arrière isolée Flash Calorimétrie différentielle Fil chaud Hot disk	$\lambda, \rho c$ a c λ λ, a	Condition du transfert 1D à vérifier Condition milieu semi-infini à vérifier Faible précision sur la valeur de a
$0,5 > \lambda > 0,05$	Plan chaud centré $T_{\text{arrière}}$ constant Ruban chaud permanent Calorimétrie différentielle Plaque chaude gardée Mini-plaque chaude Flash Fil chaud Hot disk	$\lambda, \rho c$ λ c λ λ a λ λ, a	Condition du transfert 1D à vérifier Adapté aux matériaux anisotropes Faible précision sur la valeur de a
$\lambda < 0,05$	Calorimétrie différentielle Plaque chaude gardée Plan chaud centré $T_{\text{arrière}}$ constant Ruban chaud permanent Tricouche Fil chaud Hot disk	c λ $\lambda, \rho c$ λ $\lambda, \rho c$ λ λ, a	Condition du transfert 1D à vérifier Adapté aux matériaux anisotropes Adapté aux échantillons de faibles dimensions Faible précision sur la valeur de a

L'utilisation d'un calorimètre différentiel pour la mesure de la chaleur spécifique c est adaptée à tous les matériaux mais représente un coût élevé. Il est toutefois toujours possible de réaliser la caractérisation thermique complète d'un solide par d'autres méthodes quelque soit la gamme de conductivité visée.

BIBLIOGRAPHIE

1. Andersson P., Thermal conductivity of some rubbers under pressure by the transient hot-wire method, *J. Appl. Phys.*, 47(6), pp. 2424-2426, 1976.
2. Backstrom G., Determination of thermophysical properties using a shielded thermocouple, *J. Phys. E.*, pp. 1049-1053, 1982.
3. Bal H., Modélisation et mesure de propriétés thermiques d'un milieu poreux humide : brique de latérite avec gousse de mil, Thèse de l'Université Cheik Anta Diop, Dakar, 2011.
1. Bardon J.-P., Mesure de température et de flux de chaleur par des méthodes par contact, Ecole d'hiver METTI'99, vol.1, pp.101-136, Odeillo, 1999.
2. Batsale J.-C., Mesure de résistance thermique de plaques minces à l'aide d'une mini-plaque chaude, *Revue Générale de Thermique*, n° 390-391, pp. 387-391, 1994.
3. Beck J.V., Arnold K.J., Parameter estimation in engineering and science, John Wiley and Sons Ed., New York, 1977.
4. Bohac V., Gustavsson M.K., Kubicar L., Gustafsson S.E., Parameter estimations for measurements of thermal transport properties with the hot disk thermal constants analyzer, *Review of scientific instruments*, vol.71, n°6, 2000.
5. Boudenne A., Ibos L., Gehin E., Candau Y., A simultaneous characterization of thermal conductivity and diffusivity of polymer materials by a periodic method, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol.37, pp. 132-139, 2004.
6. Bourouga B., Goizet V., Bardon J.-P., Les aspects théoriques régissant l'instrumentation d'un capteur thermique parietal à faible inertie (The theoretical aspects of the instrumentation of a weak inertia parietal thermal sensor), *International Journal of Thermal Sciences*, vol.39, pp.96-109, 2000.
7. Coquard R., Baillis D., Quenard D., Experimental and theoretical study of the hot-wire method applied to low-density thermal insulators, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49, pp. 4511-4524, 2006.
8. Cull J.P., Thermal conductivity probes for rapid measurements in rock, *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, 7, 771-774, 1974.
9. Carslaw H.S., Jaeger J.C., « Conduction of heat in solids », Second Edition, Oxford University Press, 1959.
10. De Hoog F.R., An improved method for numerical inversion of Laplace transforms, *Society of Industrial and Applied Mathematics*, 3 (3), pp.357-366,1982.
11. Degiovanni A. « Diffusivité et méthode flash », *Revue Générale de Thermique*, n°185, pp. 420-441, 1977.
12. Degiovanni A., Laurent A., « Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode flash », *Revue de Physique Appliquée*, n° 21, pp. 229-237, 1986.
13. Degiovanni A., Batsale J.-C., Maillet D., Mesure de la diffusivité longitudinale de matériaux anisotropes, *Revue Générale de Thermique*, vol.35, pp.141-147, 1996.
14. Dilhaire S., Grauby S., Claeys W., Batsale J.-C., Thermal parameters identification of micrometric layers of microelectronic devices by thermoreflectance microscopy, *Microelectronics Journal*, vol.35, pp.811-816, 2004.
15. Dos Santos W.N., Mummery P., Wallwork A., Thermal diffusivity of polymers by the laser flash technique, *Polymer testing*, vol.24, pp.628-635, 2005.
16. Edwards A.L., A Compilation of Thermal Property Data for Computer Heat-Conduction Calculations, UCRL-50589, University of California Lawrence Radiation Laboratory, 1969.
17. Franco A., An apparatus for the routine measurement of thermal conductivity of materials for building application based on a transient hot-wire method, *Applied Thermal Engineering*, vol.27, pp. 2495-2504, 2007.
18. Gobbé C., Iserna S., Ladevie B., Hot strip method: application to thermal characterisation of orthotropic media , *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 23, n°10, pp. 951-958, 2004.

19. Gustafsson S.E., Karawacki E., Chohan M.A., Thermal transport studies of electrically conducting materials using the transient hot-strip technique, *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol.19, pp. 727-735, 1986.
20. Gustafsson S.E., Transient hot strip techniques for measuring thermal conductivity and thermal diffusivity, *The Rigaku Journal*, vol. 4, n°1-2, pp. 16-28, 1987.
21. Gustafsson S.E., Karawacki E., Khan M.N., Transient hot strip techniques for simultaneously measuring thermal conductivity and thermal diffusivity of solids and fluids, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol.12, pp. 1411-1421, 1979.
22. Gustafsson S.E., Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials, *Rev. Sci. Instrum.*, vol.62, n°3, pp.797-804, 1991.
23. Hammerschmidt U., A new pulse hot strip sensor for measuring thermal conductivity and thermal diffusivity of solids, *International Journal of Thermophysics*, vol.24, n°3, pp.675-682, 2003.
24. Hay B., Filtz J.R., Batsale J.C., Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash, *Technique de l'ingénieur*, R2 995, 2002.
25. He Y., Rapid thermal conductivity measurement with a hot disk sensor. Part 1. Theoretical considerations. *Thermochimica Acta*, 436, pp. 122-129, 2005.
26. Hladik J., « Métrologie des propriétés thermophysiques des matériaux », Masson, 1990.
27. Hu Z., Sun D.-W., CFD evaluating the influence of airflow on the thermocouple-measured temperature data during air-blasting chilling, *International Journal of Refrigeration*, vol.25, p.546-551, 2002.
28. Jannot Y., Acem Z., A quadrupolar complete model of the hot disc, *Measurement Science and Technology*, vol.18, pp. 1229-1234, 2007.
29. Jannot Y., Rémy B., Degiovanni A., Measurement of Thermal Conductivity and Contact Resistance Through a Tiny Hot-Plate Experiment, *High Temperatures High Pressures*, 39(1), 2010.
30. Jannot Y., Meukam P., Simplified estimation method for the determination of thermal effusivity and thermal conductivity with a low cost hot strip, *Measurement Science and Technology*, vol. 15, pp. 1932-1938, 2004.
31. Jannot Y., Batsale J.-C., Chausi B., Study of a transient non-intrusive sensor for internal temperature estimation during freezing, *International Journal of Refrigeration*, vol.27, pp. 612-620, 2004.
32. Jannot Y., Acem Z., Kanmogne A., Transient hot plate method with two temperature measurements for thermal characterization of metals, *Measurement Science and Technology*, vol.17, pp.69-74, 2006.
33. Jannot Y., Degiovanni A., Payet G., Thermal conductivity measurement of insulating materials with a three layers device, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, pp. 1105-1111, 2009.
34. Jannot Y., Felix V., Degiovanni A., A centered hot plate method for thermal properties measurement of thin insulating materials, *Measurement Science and Technology*, 2010.
35. Krapez J.-C., Spagnolo L., Frieb M., Maier H.-P., Neuer G., Measurement of in-plane diffusivity in non-homogeneous slabs by applying flash thermography, *International Journal of Thermosciences*, vol.43, pp.967-977, 2004.
36. Kubicar L., Bohac V., Vretenar V., Transient methods for the measurement of thermophysical properties: The pulse transient method, *High Temperatures – High pressures*, vol.34, pp.505-514, 2002.
37. Kubicar L., Bohac V., A step-wise method for measuring thermophysical parameters of materials, *Measurement Science and Technology*, vol. 11, pp. 252-258, 2000.
38. Kurpisz K., Nowak A.J., *Inverse thermal problems*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK and Boston, USA, 1995.
39. Ladevie B., Mise au point de dispositifs de caractérisation thermophysique de matériaux isolants solides ou pâteux, extension aux fluides cisailés, Thèse doctorat ENSAM, Bordeaux, 1998.
40. Ladevie B., Fudym O., Batsale J.C., A new simple device to estimate thermophysical properties of insulating materials, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, vol.17, n°4, pp.473-484, 2000.
41. Liang X.-G., Zhang Y., Ge X., The measurement of thermal conductivities of solid fruits and vegetables, *Meas. Sci. Technol.*, 10, N82-N86, 1999

42. Log T., Metallinou M.M., Thermal conductivity measurement using a short transient hot-strip method, *Rev. Sci. Instrum.*, vol.63, n°8, pp.3966-3971, 1992.
43. Log T., Gustafsson, S.E., Transient plane source (TPS) technique for measuring thermal transport properties of building materials, *Fire and Materials*, vol.19, pp.43-49, 1995.
44. Lourenco M.J., Rosa S.C.S., Nieto de Castro C.A., Albuquerque C., Erdmann B., Lang J., Roitzsch R., Simulation of the transient heating in an unsymmetrical coated hot-strip sensor with a self adaptative finite element method, *International Journal of Thermophysics*, vol.21, n°2, pp. 377-384, 2000.
45. Maillet D., Apport des méthodes analytiques à l'identification de paramètres et à la conduction inverse en thermique, Thèse d'état de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 1991.
46. Maillet D., André A., Batsale J.-C., Degiovanni A., Moyne C., *Thermal quadrupoles*, John Wiley & Sons Ltd, 2000.
47. Malinaric S., Parameter estimation in dynamic plane source method, *Measurement Science and Technology*, vol.15, pp. 807-813, 2004.
48. Matteis P., Campagnoli E., Firrao D., Ruscica G., Thermal diffusivity measurements of metastable austenite during continuous cooling, *International Journal of thermal Sciences*, 2007
49. Maroulis Z.B., Krokida M.K., Rahman M.S., A structural generic model to predict the effective thermal conductivity of fruits and vegetables during drying, *Journal of Food Engineering*, vol.52, pp. 47-52, 2002.
50. Meukam P., Caractérisation de matériaux locaux en vue de l'isolation thermique de bâtiments, Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, 2004.
51. Nagazaka Y., Nagashima A., Simultaneous measurement of the thermal conductivity and the thermal diffusivity of liquids by the transient hot-wire method, *Rev. Sci. Instrum.*, 52(2), pp.229-232, 1981.
52. Nguyen K. T., Prystay M., An inverse method for estimation of the initial temperature profile and its evolution in polymer processing, *International Journal of Heat and mass Transfer*, vol.42, pp.1969-1978, 1999.
53. Özisik M. N., *Heat conduction*, John Wiley & Sons, Inc., 1993.
54. Pagano A.M., Mascheroni R.H., Sorption isotherms for amaranth grains, *Journal of Food Engineering*, Vol. 67, n° 4, pp. 441-450, 2005.
55. Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P., Abbot G.L., Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity, *Journal of Applied Physics*, vol. 32, n°9, pp. 1679-1684, 1961.
56. Perry I., Batsale J.-C., Maillet D., Degiovanni A., Measurement of thermal diffusivities through processing of infrared images, *Review of Scientific Instruments*, vol.66, n°1, pp.182-192, 1995.
57. Rharbaoui B., Contribution à l'étude de la mesure simultanée de la conductivité et de la diffusivité thermiques par la méthode du fil chaud, Thèse de doctorat, Université d'Angers, 1994.
58. Salmon D., Thermal conductivity of insulations using guarded hot plates, including recent developments and source of reference materials, *Measurement Science and Technology* 12, pp. 89-98, 2001.
59. Stehfest H., Numerical inversion of Laplace transform, *Comm. ACM*, 13(1), p. 47-49, 1970.
60. Song Y.W., Grob U., Hahne E., A new method for thermal diffusivity and thermal conductivity evaluation from transient hot strip measurement, *Fluid Phase Equilibria*, vol.88, pp.291-302, 1993.
61. Spiegel M.R., *Transformées de Laplace, cours et problèmes*, Série Schaum, Mac Graw Hill, 1990.
62. Trigeassou J.C., *Recherche de modèles expérimentaux*, Technique et Documentation, Lavoisier, 1988.
63. Xamán J., Lira L., Arce J., Analysis of the temperature distribution in a guarded hot plate apparatus for measuring thermal conductivity, *Applied Thermal Engineering* 29 (4), pp. 617-623, 2009.
64. Zhang H., He L., Cheng S., Zhai Z., Gao D., A dual thermistor probe for absolute measurement of thermal diffusivity and thermal conductivity by the heat pulse method, *Measurement Science and Technology*, vol.14, pp. 1396-1401, 2003.

65. Zhang X. et Degiovanni A., Mesure de l'effusivité thermique de matériaux solides et homogènes par une méthode de « sonde » plane, Journal de Physique III, n°6, pp.1243-1265, 1993.
66. Zhang X., Degiovanni A., Maillat D., Hot-wire measurement of thermal conductivity of solids: a new approach, High Temperatures-High Pressures, vol.25, pp.577-584, 1993.
67. Zhou W., Qi S., An Q., Zhao H., Liu N., Thermal conductivity of boron nitride reinforced polyethylene composites, Materials Research Bulletin, vol.42, pp. 1863-1873, 2007.

A.1: Propriétés physiques de certains corps

	ρ kg m ⁻³	c_p J kg ⁻¹ °C ⁻¹	λ W m ⁻¹ °C ⁻¹		ρ kg m ⁻³	c_p J kg ⁻¹ °C ⁻¹	λ W m ⁻¹ °C ⁻¹
Métaux et alliages				Matériaux de construction			
Acier au carbone	7833	465	54	Ardoise	2400	879	2,2
Acier inox 15%Cr, 10%Ni	7864	460	20	Basalte	2850	881	1,6
Acier inox 18%Cr, 8%Ni	7816	460	16,3	Béton caverneux	1900	879	1,4
Acier inox 25%Cr, 20%Ni	7864	460	13	Béton plein	2300	878	1,75
Alumine			29	Bitume (cartonné)	1050	1305	0,23
Aluminium	2707	896	204	Bois feuillus légers	525	3143	0,15
Argent	10525	234	407	Bois feuillus mi-lourds	675	3156	0,23
Bronze 75%Cu, 25%Sn	8800	377	188	Bois feuillus très légers	375	3147	0,12
Bronze 92%Cu, 8%Al	7900	377	71	Bois résineux légers	375	3147	0,12
Carbone graphite	2250	707	147	Bois résineux mi-lourds	500	3160	0,15
Carbure de silicium			13	Bois résineux très légers	375	3147	0,12
Chrome	2118	7160	449	Brique terre cuite	1800	878	1,15
Constantan 60% Cu, 40%Ni	8922	410	22,7	Calcaire dur	2450	882	2,4
Cuivre	8954	383	386	Calcaire tendre	1650	879	1
Cupronickel 70%Cu, 30%Ni	8900	377	29,3	Carrelage	2400	875	2,4
Duralumin	2787	883	164	Contre-plaqué okoumé	400	3000	0,12
Etain	7304	226	64	Contre-plaqué pin	500	3000	0,15
Fer	7870	452	73	Granite	2600	881	3
Fonte	7849	460	59	Gravier (vrac)	1800	889	0,7
Laiton 70%Cu, 30%Zn	8522	385	111	Grès	2500	880	2,6
Magnésium	1740	1004	151	Lave	2350	881	1,1
Or	19300	128	312	Marbre	2700	881	2,5
Platine	21400	140	69	Plâtre	1440	840	0,48
Plomb	11373	130	35	Schiste	2400	879	2,2
Sodium liquide	930	1381	84,5	Matériaux isolants			
Titane	4500	523	20,9	Balsa	140		0,054
Tungstène	19350	134	163	Coton	80	1300	0,06
Zinc	7144	384	112	Kapok			0,035
Matériaux divers				Laine de roche	20	880	0,047
Amiante	575	1046	0,15		55	880	0,038
Asphalte	2115	920	0,062		135	880	0,041
Caoutchouc (naturel)	1150		0,28	Laine de verre	8	875	0,051
Caoutchouc (vulcanisé)	1100	2010	0,13		10	880	0,045
Carton	86	2030	0,048		15	880	0,041
Cuir	998		0,159		40	880	0,035
Glace	920	2040	1,88	Liège expansé	120	2100	0,044
Plexiglass	1190	1465	0,19	Moquette	200	1300	0,06
Porcelaine	2400	1088	1,035	Polyuréthane (mousse)	32	1300	0,03
Polyéthylène	929	1830	0,46		50	1360	0,035
PVC	1459	930	0,21		85	1300	0,045
Sable	1515	800	0,2-1,0	PVC (mousse rigide)	30	1300	0,031
Téflon	2170	1004	0,25		40	1300	0,041
Terre mouillée	1900	2000	2	Polystyrène expansé	12	1300	0,047
Terre sèche	1500	1900	1		14	1300	0,043
Verre	2300	837	1,05		18	1300	0,041
Verre Pyrex	2220	728	1,13	Styrofoam	30		0,032

A.2 : Propriétés physiques de l'air et de l'eau

Propriétés de l'eau à saturation							Propriétés de l'air à 1 atm						
θ	ρ	c_p	λ	$10^4 \cdot \mu$	$10^7 \cdot a$	Pr	θ	ρ	c_p	λ	$10^5 \cdot \mu$	$10^5 \cdot a$	Pr
°C	kg.m ⁻³	J.kg ⁻¹ .°C ⁻¹	W.m ⁻¹ .°C ⁻¹	Pa.s ⁻¹	m ² .s ⁻¹		°C	kg.m ⁻³	J.kg ⁻¹ .°C ⁻¹	W.m ⁻¹ .°C ⁻¹	Pa.s ⁻¹	m ² .s ⁻¹	
0	1002	4218	0,552	17,90	1,31	13,06	0	1,292	1006	0,0242	1,72	1,86	0,72
20	1001	4182	0,597	10,10	1,43	7,02	20	1,204	1006	0,0257	1,81	2,12	0,71
40	995	4178	0,628	6,55	1,51	4,34	40	1,127	1007	0,0272	1,90	2,40	0,70
60	985	4184	0,651	4,71	1,55	3,02	60	1,059	1008	0,0287	1,99	2,69	0,70
80	974	4196	0,668	3,55	1,64	2,22	80	0,999	1010	0,0302	2,09	3,00	0,70
100	960	4216	0,680	2,82	1,68	1,74	100	0,946	1012	0,0318	2,18	3,32	0,69
120	945	4250	0,685	2,33	1,71	1,45	120	0,898	1014	0,0333	2,27	3,66	0,69
140	928	4283	0,684	1,99	1,72	1,24	140	0,854	1016	0,0345	2,34	3,98	0,69
160	910	4342	0,680	1,73	1,73	1,10	160	0,815	1019	0,0359	2,42	4,32	0,69
180	889	4417	0,675	1,54	1,72	1,00	180	0,779	1022	0,0372	2,50	4,67	0,69
200	867	4505	0,665	1,39	1,71	0,94	200	0,746	1025	0,0386	2,57	5,05	0,68
220	842	4610	0,652	1,26	1,68	0,89	220	0,700	1028	0,0399	2,64	5,43	0,68
240	816	4756	0,635	1,17	1,64	0,88	240	0,688	1032	0,0412	2,72	5,80	0,68
260	786	4949	0,611	1,08	1,58	0,87	260	0,662	1036	0,0425	2,79	6,20	0,68
280	753	5208	0,580	1,02	1,48	0,91	280	0,638	1040	0,0437	2,86	6,59	0,68
300	714	5728	0,540	0,96	1,32	1,02	300	0,616	1045	0,0450	2,93	6,99	0,68

Corrélations entre θ et 100 °C

(θ : température en °C, T température en K)

Pour l'air

- $\rho = \frac{353}{(\theta + 273)}$ kg m⁻³
- $c_p = 1008$ J kg⁻¹ °C⁻¹
- $\lambda = 7,57 \cdot 10^{-5} \theta + 0,0242$ W m⁻¹ °C⁻¹
- $\mu = 10^{-5} (0,0046 \theta + 1,7176)$ Pa s
- $\alpha = 10^{-5} (0,0146 \theta + 1,8343)$ m² s⁻¹
- $Pr = -2,54 \cdot 10^{-4} \theta + 0,7147$
- $\beta \approx \frac{1}{T}$ K⁻¹

Pour l'eau

- $\rho = -0,00380 \theta^2 - 0,0505 \theta + 1002,6$ kg m⁻³
- $c_p = 4180$ J kg⁻¹ °C⁻¹
- $\lambda = -9,87 \cdot 10^{-6} \theta^2 + 2,238 \cdot 10^{-3} \theta + 0,5536$ W m⁻¹ °C⁻¹
- $\mu = 10^{-4} \frac{17,9 - 0,07377\theta + 0,0003354\theta^2}{1 + 0,03032\theta + 8,765 \cdot 10^{-5} \theta^2}$ Pa.s
- $a = 10^{-7} (-0,00360 \theta + 1,340)$ m² s⁻¹
- $Pr = \frac{13,06 + 1,387\theta - 0,0037\theta^2}{1 + 0,12407\theta + 0,005297\theta^2}$
- $\frac{g \beta \rho^2 c_p}{\mu \lambda} = (0,0105\theta^2 + 0,477\theta - 0,0363) 10^9$ °C⁻¹ m⁻³
- $\log_{10} [p_{sat}(T)] = 20,3182 - \frac{2795}{T} - 3,868 \log_{10}(T)$ mmHg -50°C < θ < 200°C
- $L_v = 2495 - 2,346 \theta$ kJ.kg⁻¹ 0°C < θ < 100°C

A.3 : Transformations intégrales : Laplace, Fourier, Hankel

Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Définitions

Sinus	Cosinus
$F_s [T(x)] = \theta_s(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} T(x) \sin[\omega x] dx$	$F_c [T(x)] = \theta_c(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} T(x) \cos[\omega x] dx$
$T(x) = F_s^{-1}[\theta_s(\omega)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \theta_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega$	$T(x) = F_c^{-1}[\theta_c(\omega)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \theta_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega$

Propriétés

$F_s \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] = -\omega \theta_c(\omega)$	$F_c \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] = -\omega \theta_s(\omega) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T(0)$
$F_s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = -\omega^2 \theta_s(\omega) + \omega \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T(0)$	$F_c \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = -\omega^2 \theta_c(\omega) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0}$

Transformée finie de Fourier en sinus et cosinus

Définitions

Si la température $T(x)$ n'est définie que sur l'intervalle $[0, L]$, on peut utiliser une transformation finie de Fourier en sinus ou en cosinus :

$$F_s [T(x)] = \theta_s(n) = \int_0^L T(x) \sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx \quad \text{ou} \quad F_c [T(x)] = \theta_c(n) = \int_0^L T(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$$

$$T(x) = F_s^{-1}[\theta_s(n)] = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_s(n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{ou} \quad T(x) = F_c^{-1}[\theta_c(n)] = \frac{1}{L} \theta_c(0) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_c(n) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Propriétés

$$F_s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = \theta_s(n) = \frac{n\pi}{L} [T(0) - (-1)^n T(L)] - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \theta_s(n)$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = \theta_c(n) = (-1)^n \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \theta_c(n)$$

Transformée de Hankel d'ordre ν

Définition

Pour $\nu > -1/2$:

$$H_\nu [T(r)] = \theta_\nu(\sigma) = \int_0^\infty r J_\nu(\sigma r) T(r) dr \quad \quad T(x) = H_\nu^{-1}[\theta_\nu(\sigma)] = \int_0^\infty \sigma J_\nu(\sigma r) \theta_\nu(\sigma) d\sigma$$

Propriété

$$H_\nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\nu^2 T}{r^2} \right] = -\sigma^2 \theta_\nu(\sigma) \quad ; \quad \text{à l'ordre } 0 : \quad H_0 [T(r) = T_i] = T_i \int_0^\infty r J_0(\sigma r) dr = \frac{r}{\sigma} J_1(\sigma r)$$

A.4 : Transformation de Laplace inverse

Méthode analytique

La transformée de Laplace $\theta(p)$ de la fonction $T(t)$ est donnée par : $L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^{\infty} \exp(-p t) T(t) dt$

Il n'existe pas de formule analytique générale permettant de calculer $T(t)$ connaissant $\theta(p)$. On connaît cependant l'expression exacte de $T(t)$ pour certaines fonctions particulières $\theta(p)$, on en trouvera des exemples page suivante (cf. Spiegel pour des tables plus complètes). L'utilisation de ces tables associée aux propriétés particulières de la transformation de Laplace inverse rappelées en annexe A.2.2 peut permettre de résoudre un certain nombre de cas. On essaiera toujours de décomposer une fonction complexe en somme, produit, série... de fonctions simples plus facilement inversibles.

Méthodes numériques

Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, on peut employer l'une des deux méthodes numériques suivantes :

Méthode de Stehfest

La transformée inverse de la fonction $\theta(p)$ peut se calculer par (Stehfest, 1970):

$$T(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^N V_j \theta_i \left(\frac{j \ln(2)}{t} \right)$$

$N = 20$ (double précision) :

$V1 = -5,511463844797178 \cdot 10^{-6}$	$V2 = 1,523864638447972 \cdot 10^{-1}$	$V3 = -1,174654761904762 \cdot 10^2$
$V4 = 1,734244933862434 \cdot 10^4$	$V5 = -9,228069289021164 \cdot 10^5$	$V6 = 2,37740877871031810 \cdot 10^7$
$V7 = -3,494211661953704 \cdot 10^8$	$V8 = 3,241369852231879 \cdot 10^9$	$V9 = -2,027694830723779 \cdot 10^{10}$
$V10 = 8,946482982379724 \cdot 10^{10}$	$V11 = -2,870209211471027 \cdot 10^{11}$	$V12 = 6,829920102815115 \cdot 10^{11}$
$V13 = -1,219082330054374 \cdot 10^{12}$	$V14 = 1,637573800842013 \cdot 10^{12}$	$V15 = -1,647177486836117 \cdot 10^{12}$
$V16 = 1,22192455444226 \cdot 10^{12}$	$V17 = -6,488065588175326 \cdot 10^{11}$	$V18 = 2,333166532137059 \cdot 10^{11}$
$V19 = -5,091380070546738 \cdot 10^{10}$	$V20 = 5,091380070546738 \cdot 10^9$	

$N = 10$ (simple précision):

$V1 = 1/12$	$V2 = -385/12$	$V3 = 1279$	$V4 = -46871/3$	$V5 = 505465/6$	$V6 = -473915/2$
$V7 = 1127735/3$	$V8 = -1020215/3$	$V9 = 328125/2$	$V10 = -65625/2$		

Méthode de Fourier

$$T(t) = \frac{\exp(c t)}{t_{\max}} \left[\frac{\theta(c)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re}[\theta(c + j \omega_k)] \cos(\omega_k t) - \operatorname{Im}[\theta(c + j \omega_k)] \sin(\omega_k t)) \right]$$

Avec $\omega_k = \frac{k \pi}{t_{\max}}$

La somme infinie est dans la pratique calculée pour un nombre fini N de termes, on prendra en général $N > 100$. Cette méthode nécessite de choisir deux paramètres : c et t_{\max} . On doit s'assurer a posteriori que $\exp(-2 c t_{\max}) T(2 t_{\max}) \approx 0$.

Choix d'une méthode et vérification des résultats

La méthode de Stehfest est plus simple à mettre en oeuvre car elle ne nécessite pas de choisir certains paramètres. La méthode de Fourier peut conduire à un meilleur résultat dans le cas d'inversion de certaines fonctions comme les fonctions périodiques par exemple (Maillet et al, 2000).

L'étude du comportement de la fonction $\theta(p)$ aux temps longs ($t \rightarrow \infty$ soit $p \rightarrow 0$) et aux temps courts ($t \rightarrow 0$ soit $p \rightarrow \infty$) peut conduire à des formules approchées de $\theta(p)$ dont on peut alors trouver la transformée de Laplace inverse analytiquement. La comparaison de ces solutions analytiques avec les résultats de l'inversion numérique donne une indication sur la justesse de l'inversion numérique.

A.4 : Transformation de Laplace inverse

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)	$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{\ln(p)}{p}$	$-\ln(t) - \gamma$; $\gamma = 0,57721$
1	$\delta(t)$ Dirac	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{p+\beta}$	$e^{-\beta t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{sh}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{ch}(\omega t)$
$\frac{b}{p(b + \sqrt{p})}$	$1 - \exp(b^2 t) \text{erfc}(b\sqrt{t})$	$\frac{1}{p^n}$ n = 1, 2, 3...	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	T(t)
e^{-qx}	$\frac{x}{2\sqrt{\pi \alpha t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p}$	$\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t + \frac{x^2}{2\alpha}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - x \left(\frac{t}{\pi \alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - h \alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$\alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$	$\frac{1}{h} \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \frac{1}{h} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p q (q+h)}$	$\frac{2}{h} \left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{1+h x}{h^2} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \frac{1}{h^2} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{(q+h)^2}$	$-2 h \left(\frac{\alpha^3 t}{\pi}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha t}\right) + \alpha (1+h x + 2 h^2 \alpha t) \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$

A.5 : Racines de l'équation transcendante

$$\beta J_1(\beta) = Bi J_0(\beta)$$

$$\beta_i^2(Bi) = \beta_i^2(Bi=0) + \frac{a_{1i} Bi + (\beta_i^2(Bi=\infty) - \beta_i^2(Bi=0)) Bi^2}{b_{1i} + b_{2i} Bi + Bi^2} \quad (1)$$

Tableau 1 : Valeurs des coefficients de la formule (1) pour les 6 premières racines.

i	1	2	3	4	5	6
bi (Bi = 0)	0	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
bi (Bi = ∞)	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	18.0711
a _{1i}	18.3237	52.7206	135.9384	273.2410	429.5111	639.8128
b _{1i}	9.1714	26.8437	70.0034	140.0121	223.1145	332.8289
b _{2i}	5.1080	7.1083	10.9044	15.0738	18.6848	22.5854
Ecart maxi (%) 0.01 < Bi < 100	0.069	0.021	0.027	0.028	0.020	0.016

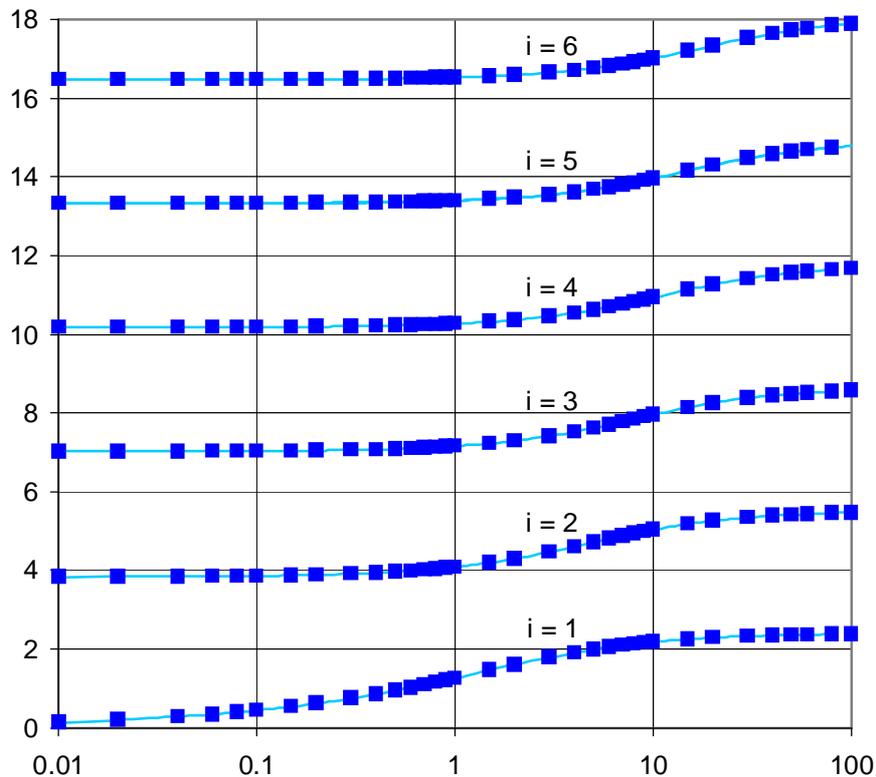


Figure 1 : Valeurs exactes (■) et calculées (—) par (1) des 6 premières racines.

A.6 : Choix des transformations intégrales

n°	Condition limite x = 0	Condition limite x = e	Equation transcendante	Fonctions propres	Norme
Cylindre creux de rayons R₁ et R₂					
1	$\phi = 0$	$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R_1)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n R_1)J_0(\alpha_n R_2) = 0$	$J_0(\alpha_n r)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n r)J_0(\alpha_n R_2)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_0^2(\alpha_n R_1) - J_0^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n R_1)}$
2	$\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$J_1(\alpha_n R_1)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n R_1) = 0$	$J_1(\alpha_n R_2)Y_0(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n r)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_0^2(\alpha_n R_1) - J_1^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n R_1)}$
3	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R_2)Y_1(\alpha_n R_1) - Y_0(\alpha_n R_2)J_1(\alpha_n R_1) = 0$	$J_0(\alpha_n r)Y_1(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n r)J_1(\alpha_n R_2)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_1^2(\alpha_n R_1) - J_0^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n R_1)}$
4	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\phi = 0$	$J_1(\alpha_n R_1)Y_1(\alpha_n R_2) - Y_1(\alpha_n R_1)J_1(\alpha_n R_2) = 0$	$J_1(\alpha_n R_2)Y_1(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n R_2)J_1(\alpha_n r)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_1^2(\alpha_n R_1) - J_1^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n R_1)}$
Cylindre plein de rayon extérieur R					
5		$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R) = 0$	$J_0(\alpha_n R)$	$\frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_n R)$
6		$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$J_1(\alpha_n R) = 0$	$J_0(\alpha_n R)$	$\frac{R^2}{2} J_0^2(\alpha_n R)$ si $\alpha_n \neq 0$ $\frac{R^2}{2}$ si $\alpha_n = \alpha_0 = 0$

A.6 : Choix des transformations intégrales

Plaque d'épaisseur e					
n°	Condition limite x=0	Condition limite x=e	Valeurs propres	Fonctions propres	Norme
1	$\phi = 0$	$\phi = 0$	$n \pi / e$	$\sin(\alpha_n x)$	$e/2$
2	$\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi / e$	$\sin(\alpha_n x)$	$e/2$
3	$\phi = 0$	$\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\sin(\alpha_n x)$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{h e / \lambda}{(h e / \lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
4	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\phi = 0$	$\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi / e$	$\cos(\alpha_n x)$	$e/2$
5	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$n \pi / e$	$\cos(\alpha_n x)$	e pour $n = 0$ $e/2$ pour $n = 1, 2, \dots$
6	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	Racines positives de $\cotg(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\cos(\alpha_n x)$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{h e / \lambda}{(h e / \lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
7	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	$\phi = 0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\sin[\alpha_n(e-x)]$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{h e / \lambda}{(h e / \lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
8	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	Racines positives de $\cotg(\alpha_n e) = \frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\cos[\alpha_n(e-x)]$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{h e / \lambda}{(h e / \lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
9	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h_1 \phi = 0$	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h_2 \phi = 0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = \frac{\lambda \alpha_n (h_1 + h_2)}{(\lambda \alpha_n)^2 - h_1 / h_2}$	$\cos(\alpha_n x)$ $+ \frac{h_1}{\lambda} \sin(\alpha_n x)$	$\frac{1}{2 e \alpha_n} \left[\frac{h_2 e / \lambda}{(h_2 e / \lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} + \frac{h_1 e}{\pi} \right]$

A.7 : Equations et fonctions de Bessel

Equations particulières de Bessel et leurs solutions

$$\begin{aligned}
 y'' + \frac{y'}{x} + m^2 y &= 0 & \Rightarrow & \quad y = k_1 J_0(mx) + k_2 Y_0(mx) \\
 x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)y &= 0 & \Rightarrow & \quad y = k_1 J_n(x) + k_2 Y_n(x) \quad (n \text{ entier}) \\
 y'' + \frac{y'}{x} - m^2 y &= 0 & \Rightarrow & \quad y = k_1 I_0(mx) + k_2 K_0(mx) \\
 x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2)y &= 0 & \Rightarrow & \quad y = k_1 I_n(x) + k_2 K_n(x)
 \end{aligned}$$

J_n Fonction de Bessel de 1^{ère} espèce non modifiée d'ordre n
 I_n Fonction de Bessel de 1^{ère} espèce modifiée d'ordre n
 Y_n Fonction de Bessel de 2^{ème} espèce non modifiée d'ordre n
 K_n Fonction de Bessel de 2^{ème} espèce modifiée d'ordre n.

(cf. Özisik, 1933, pour la définition des fonctions de Bessel).

Principales propriétés des fonctions de Bessel

Récurrance

$$\begin{aligned}
 J_{n+1}(u) &= -J_{n-1}(u) + \frac{2n}{u} J_n(u) & Y_{n+1}(u) &= -Y_{n-1}(u) + \frac{2n}{u} Y_n(u) \\
 I_{n+1}(u) &= I_{n-1}(u) - \frac{2n}{u} I_n(u) & K_{n+1}(u) &= K_{n-1}(u) - \frac{2n}{u} K_n(u)
 \end{aligned}$$

Dérivée

$$\frac{dJ_0(u)}{du} = -J_1(u) \quad ; \quad \frac{d[u J_1(u)]}{du} = u J_0(u) \quad ; \quad \frac{dI_0(u)}{du} = I_1(u) \quad ; \quad \frac{dK_0(u)}{du} = -K_1(u) \quad ; \quad \frac{dY_0(u)}{du} = -Y_1(u)$$

Limites des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Si $u \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{cccc}
 J_0(u) \rightarrow 1 & J_1(u) \rightarrow 0 & Y_0(u) \rightarrow -\infty & Y_1(u) \rightarrow -\infty \\
 I_0(u) \rightarrow 1 & I_1(u) \rightarrow 0 & K_0(u) \rightarrow +\infty & K_1(u) \rightarrow +\infty
 \end{array}$$

Si $u \rightarrow \infty$

$$\begin{array}{cccc}
 J_0(u) \rightarrow 0 & J_1(u) \rightarrow 0 & Y_0(u) \rightarrow 0 & Y_1(u) \rightarrow 0 \\
 I_0(u) \rightarrow +\infty & I_1(u) \rightarrow +\infty & K_0(u) \rightarrow 0 & K_1(u) \rightarrow 0
 \end{array}$$

Comportement asymptotique des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Si $u \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{cccc}
 J_0(u) \rightarrow 1 & J_1(u) \rightarrow u/2 & Y_0(u) \rightarrow (2/\pi) \ln(u) & Y_1(u) \rightarrow 2/\pi u \\
 I_0(u) \rightarrow 1 & I_1(u) \rightarrow u/2 & K_0(u) \rightarrow -\ln(u) & K_1(u) \rightarrow 1/u
 \end{array}$$

Si $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 J_0(u) &\rightarrow \sqrt{2/\pi u} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) & J_1(u) &\rightarrow \sqrt{2/\pi u} \cos\left(u - \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & Y_0(u) &\rightarrow \sqrt{2/\pi u} \sin\left(u - \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 Y_1(u) &\rightarrow \sqrt{2/\pi u} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right) & I_0(u), I_1(u) &\rightarrow \sqrt{2/\pi u} \exp(u) & K_0(u), K_1(u) &\rightarrow \sqrt{\pi/2u} \exp(-u)
 \end{aligned}$$

A.7: Fonctions et équations de Bessel

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0	1,0000	0,0000	¥	¥	3,0	4,881	3,953	0,035	0,041
0,1	1,0025	0,0501	2,427	9,849	3,1	5,294	4,326	0,031	0,036
0,2	1,01	0,1005	1,753	4,775	3,2	5,747	4,734	0,028	0,031
0,3	1,0226	0,1517	1,373	3,057	3,3	6,243	5,181	0,025	0,028
0,4	1,0404	0,204	1,115	2,185	3,4	6,785	5,67	0,022	0,025
0,5	1,0635	0,2579	0,924	1,656	3,5	7,378	6,206	0,019	0,022
0,6	1,092	0,3137	0,778	1,302	3,6	8,028	6,793	0,017	0,020
0,7	1,1263	0,3719	0,660	1,051	3,7	8,739	7,436	0,016	0,017
0,8	1,1665	0,4329	0,565	0,862	3,8	9,517	8,14	0,014	0,016
0,9	1,213	0,4971	0,487	0,716	3,9	10,369	8,913	0,013	0,014
1,0	1,2661	0,5652	0,421	0,602	4,0	11,3	9,76		
1,1	1,3262	0,6375	0,366	0,509	4,1	12,32	10,69		
1,2	1,3937	0,7147	0,319	0,435	4,2	13,44	11,71		
1,3	1,4693	0,7973	0,278	0,372	4,3	14,67	12,82		
1,4	1,5534	0,8861	0,243	0,320	4,4	16,01	14,05		
1,5	1,6467	0,9817	0,214	0,278	4,5	17,48	15,39		
1,6	1,75	1,0848	0,188	0,240	4,6	19,09	16,86		
1,7	1,864	1,1963	0,165	0,209	4,7	20,86	18,48		
1,8	1,9896	1,3172	0,146	0,182	4,8	22,79	20,25		
1,9	2,1277	1,4482	0,129	0,160	4,9	24,91	22,2		
2,0	2,28	1,591	0,113	0,140	5,0	27,24	24,34		
2,1	2,446	1,746	0,101	0,123	5,1	29,79	26,68		
2,2	2,629	1,914	0,090	0,108	5,2	32,58	29,25		
2,3	2,83	2,098	0,079	0,094	5,3	35,65	32,08		
2,4	3,049	2,298	0,071	0,083	5,4	39,01	35,18		
2,5	3,29	2,517	0,063	0,074	5,5	42,7	38,59		
2,6	3,553	2,755	0,055	0,066	5,6	46,74	42,33		
2,7	3,842	3,016	0,049	0,058	5,7	51,17	46,44		
2,8	4,157	3,301	0,044	0,050	5,8	56,04	50,95		
2,9	4,503	3,613	0,039	0,046	5,9	61,38	55,9		